Χαρακτηρισμός των κολλοειδών του εδάφους (10 μονάδες)

Η επιστήμη των κολλοειδών είναι χρήσιμη για τον χαρακτηρισμό των σωματιδίων του εδάφους, αφού π[ολλά από αυτά μπορούν να θεωρηθούν κολλοειδή σωματίδια μικρομετρικών διαστάσεων. Για παράδειγμα, η κίνηση Brown (τυχαία κίνηση των κολλοειδών σωματιδίων) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του μεγέθους των σωματιδίων.

Μέρος A. Κινήσεις κολλοειδών σωματιδίων (1,6 μονάδες)

Αναλύουμε τη μονοδιάστατη κίνηση Brown ενός κολλοειδούς σωματιδίου με μάζα M. Η εξίσωση κίνησης για την ταχύτητά του $v(t)$ έχει ως εξής:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

όπου γ είναι ο συντελεστής απόσβεσης, $F(t)$ είναι μια δύναμη που οφείλεται στις τυχαίες συγκρούσεις με τα μόρια του νερού και $F_{\text{ext}}(t)$ είναι μια εξωτερική δύναμη. Στο μέρος A, υποθέτουμε ότι $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1	Θεωρήστε ότι ένα μόριο νερού συγκρούεται με το σωματίδιο στο $t = t_0$, δίνοντας ώθηση I_0, και στην συνέχεια ισχύει $F(t) = 0$. Αν $v(t) = 0$ πριν από τη σύγκρουση, $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ για $t > t_0$, να προσδιορίσετε το v_0 και το τ, χρησιμοποιώντας την I_0 και τις αναγκαίες παραμέτρους της Εξ. 1.	0.8pt

Στη συνέχεια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τ στις απαντήσεις σας.

A.2	Στην πραγματικότητα, τα μόρια του νερού συγκρούονται διαδοχικά με το σωματίδιο. Υποθέστε ότι η i-η σύγκρουση δίνει ώθηση I_i τη χρονική στιγμή t_i και προσδιορίστε το $v(t)$ με την προϋπόθεση ότι $t > 0$ και $v(0) = 0$. Να γράψετε επίσης την ανισότητα που προσδιορίζει το εύρος των t_i που πρέπει να ληφθεί υπόψη για ένα δεδομένο t. Στο φύλλο απαντήσεων, δεν είναι απαραίτητο να προσδιορίσετε αυτό το εύρος στην έκφραση για το $v(t)$.	0.8pt

Μέρος B. Πραγματική εξίσωση κίνησης (1,8 μονάδες)

Τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι οι ταχύτητες των σωματιδίων $v(t)$ και $v(t')$ μπορούν να θεωρηθούν ως μη σχετιζόμενες τυχαίες ποσότητες αν $|t - t'| \gg \tau$. Σε αυτή την βάση, εισάγουμε ένα θεωρητικό μοντέλο για την προσεγγιστική περιγραφή της μονοδιάστατης κίνησης Brown όπου η ταχύτητα υφίσταται τυχαίες μεταβολές σε κάθε χρονικό διάστημα δ ($\gg \tau$), δηλ,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \tag{2}$$

με $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ και μια τυχαία [ποσότητα v_n. Ικανοποιεί

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \tag{3}$$

με μια παράμετρο C που εξαρτάται από το δ. Εδώ το $\langle X \rangle$ δηλώνει την αναμενόμενη τιμή του X. Δηλαδή, αν κληρώσετε άπειρες φορές τυχαίους αριθμούς X, ο μέσος όρος θα είναι $\langle X \rangle$.

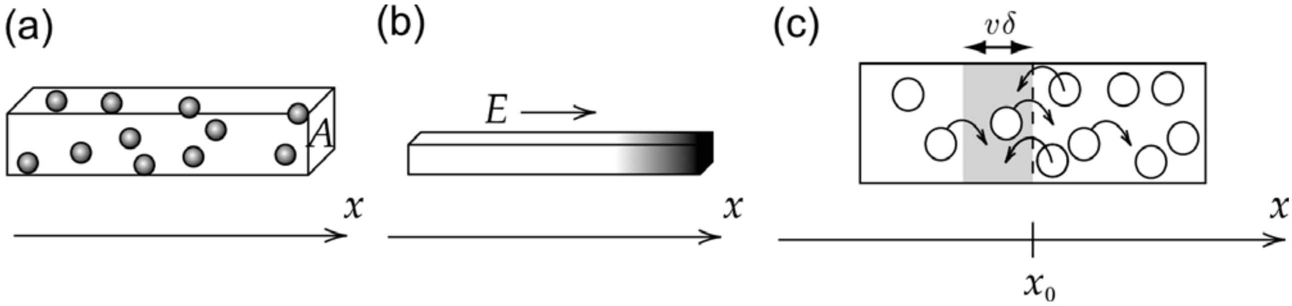
Εξετάζουμε τώρα την μετατόπιση των σωματιδίων $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ για το $t = N\delta$ με έναν ακέραιο αριθμό N.

B.1	Προσδιορίστε τις τιμές των$\langle \Delta x(t) \rangle$ και $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ χρησιμοποιώντας τις ποσότητες C, δ και t.	1.0pt

B.2	Η ποσότητα $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ ονομάζεται μέση τετραγωνική μετατόπιση (mean square displacement - MSD). Είναι ένα παρατηρήσιμο χαρακτηριστικό της κίνησης Brown, το οποίο αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση $\delta \to 0$. Από αυτό, μπορούμε να δείξουμε ότι $C \propto \delta^\alpha$ και $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. Προσδιορίστε τις τιμές; των α και β.	0.8pt

Μέρος Γ. Ηλεκτροφόρηση (2,7 μονάδες)

Εδώ συζητάμε την ηλεκτροφόρηση, δηλαδή τη μεταφορά φορτισμένων σωματιδίων από ηλεκτρικό πεδίο. Εναιώρημα κολλοειδών σωματιδίων με μάζα M και φορτίο Q (> 0) τοποθετείται σε ένα στενό κανάλι με διατομή A (Σχήμα 1(α)). Αγνοούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων, τις επιδράσεις του τοίχου, του υγρού και των ιόντων τους, καθώς και την βαρύτητα.



Σχήμα 1: Απεικόνιση για το μέρος C.

Με την εφαρμογή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E στην κατεύθυνση x, τα σωματίδια μεταφέρονται και η συγκέντρωσή τους $n(x)$ (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου) γίνεται ανομοιόμορφη (Σχήμα 1(b)). Όταν μηδενίζεται το E, η ανομοιομορφία αυτή εξαφανίζεται σταδιακά. Αυτό οφείλεται στην κίνηση Brown των σωματιδίων. Εάν το $n(x)$ δεν είναι ομοιόμορφο, οι αριθμοί των σωματιδίων που κινούνται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά μπορεί να διαφέρουν (Σχ.1(γ)). Αυτό δημιουργεί μια ροή σωματιδίων $J_D(x)$, τον μέσο αριθμό των σωματιδίων που ρέουν στο x κατά μήκος του άξονα x- ανά μονάδα διατομής και ανά μονάδα χρόνου. Η ροή αυτή είναι γνωστό ότι ικανοποιεί την σχέση

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

όπου D ονομάζεται συντελεστής διάχυσης.

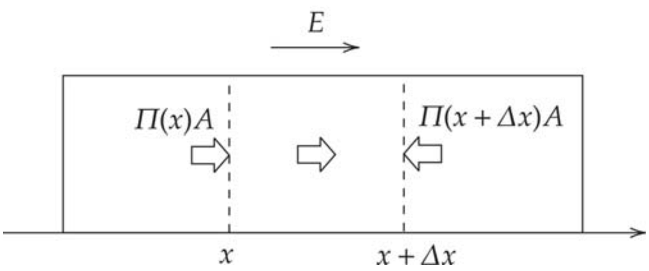
Απλουστεύοντας;, ας υποθέσουμε τώρα τα μισά σωματίδια έχουν ταχύτητα $+v$ και τα άλλα μισά έχουν ταχύτητα $-v$. Έστω ότι με $N_+(x_0)$ αυμβολίζουμε το πλήθος των σωματιδίων με ταχύτητα $+v$ που διέρχονται από την θέση x_0 από αριστερά προς τα δεξιά στην μονάδα εμβαδού διατομής και στην μονάδα του χρόνου. Τα σωματίδια με ταχύτητα $+v$ που προλαβαίνουν να διέλθουν από την θέση x_0 στο χρονικό διάστημα δ, πρέπει να βρίσκονται στην σκιασμένη περιοχή του Σχ. 1. Αφού το δ είναι μικρό, έχουμε $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$ στην περιοχή αυτή.

C.1	Εκφράστε το $\mathrm{N}_+(x_o)$ συναρτήσει των αναγκαίων ποσοτήτων από τα $v,\ \delta,\ n(x_0)$ και το $\frac{dn}{dx}(x_0)$.	0.5pt

Ορίζουμε το $N_-(x_0)$ ως το αντίστοιχο του $N_+(x_0)$ για την ταχύτητα $-v$. Με αυτό, έχουμε $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0)\rangle$. Σύμφωνα με την εξίσωση (3), έχουμε $\langle v^2\rangle = C$.

C.2	Προσδιορίστε το $J_D(x_0)$ χρησιμοποιώντας τις αναγκαίες ποσότητες από τα $C,\ \delta,\ n(x_0)$, και $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Χρησιμοποιώντας αυτό και την εξίσωση (4), εκφράστε το ως προς C και δ, και $\langle \Delta x(t)^2\rangle$ ως προς D και t.	0.7pt

Τώρα συζητάμε την επίδραση της οσμωτικής πίεσης Π, η οποία δίνεται από την σχέση $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$, όπου$N_A$ η σταθερά Avogadro, R η πσγκόσμια σταθερά των αερίων, T η θερμοκρασία και $k = \frac{R}{N_A}$ η σταθερά Boltzmann. Ας θεωρήσουμε τη ανομοιόμορφη συγκέντρωση που σχηματίζεται υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου E (Σχήμα 1(β)). Δεδομένου ότι το $n(x)$ εξαρτάται από x, το ίδιο ισχύει και για το $\Pi(x)$. Τότε οι δυνάμεις που οφείλονται στο $\Pi(x)$ και στο $\Pi(x+\Delta x)$ πρέπει να εξισορροπηθούν με τη συνολική δύναμη από το πεδίο E που δρα στα σωματίδια (Σχ.2). Εδώ θεωρούμε μικρές τιμές Δx, έτσι ώστε το $n(x)$ να μπορεί να θεωρηθεί σταθερό σε αυτό το εύρος, ενώ ισχύει $n(x+\Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.



Σχ.2: Ισορροπία δυνάμεων.

C.3	Εκφράστε το $\frac{dn}{dx}(x)$ χρησιμοποιώντας $n(x)$, T, Q, E, *και* k.	0.5pt

Ας συζητήσουμε τώρα την ισορροπία της ροής. Εκτός από τη ροή $J_D(x)$ που οφείλεται στην κίνηση Brown, υπάρχει επίσης μια ροή που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο, $J_Q(x)$. Δίνεται από τη σχέση

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

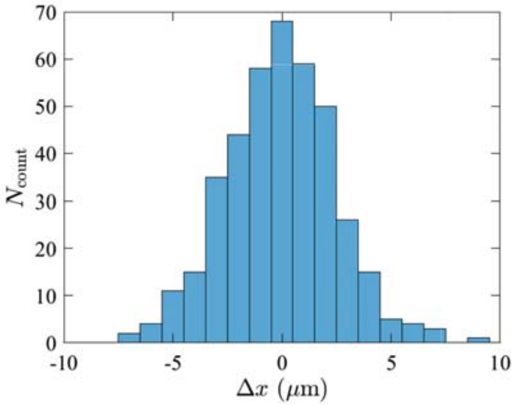
όπου u είναι η τελική ταχύτητα των σωματιδίων που οδηγούνται από το πεδίο.

C.4	Για να προσδιορίσουμε το u, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1) με το $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Δεδομένου ότι το $v(t)$ είναι κυμαινόμενο, εξετάζουμε το $\langle v(t)\rangle$. Υποθέτοντας το $\langle v(0)\rangle = 0$ και χρησιμοποιώντας το $\langle F(t)\rangle = 0$, αξιολογούμε το $\langle v(t)\rangle$ και λαμβάνουμε το $u = \lim_{t\to\infty}\langle v(t)\rangle$.	0.5pt

C.5	Το ισοζύγιο ροής δείχνει $J_D(x)+J_Q(x) = 0$. Εκφράστε τον συντελεστή διάχυσης D ως προς k, γ και T.	0.5pt

Μέρος Δ. Μέση τετραγωνική μετατόπιση (2,4 μονάδες)

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε την κίνηση Brown ενός απομονωμένου, σφαιρικού κολλοειδούς σωματιδίου ακτίνας $a = 5.0\ \mu$m μέσα στο νερό. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των μετατοπίσεων Δx που μετρήθηκαν στην κατεύθυνση x σε κάθε χρονικό διάστημα $\Delta t = 60$ s. Ο συντελεστής τριβής ισούται με $\gamma = 6\pi a\eta$, $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ Pa $\cdot$ s είναι το ιξώδες του νερού και η θερμοκρασία είναι $T = 25\ ^{\circ}$C.



Δx (μm)	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$N_{\rm count}$	0	0	0	2	4	11	15

Δx (μm)	-3	-2	-1	0	1	2	3
$N_{\rm count}$	35	44	58	68	59	50	26

Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
$N_{\rm count}$	15	5	4	3	0	1	0

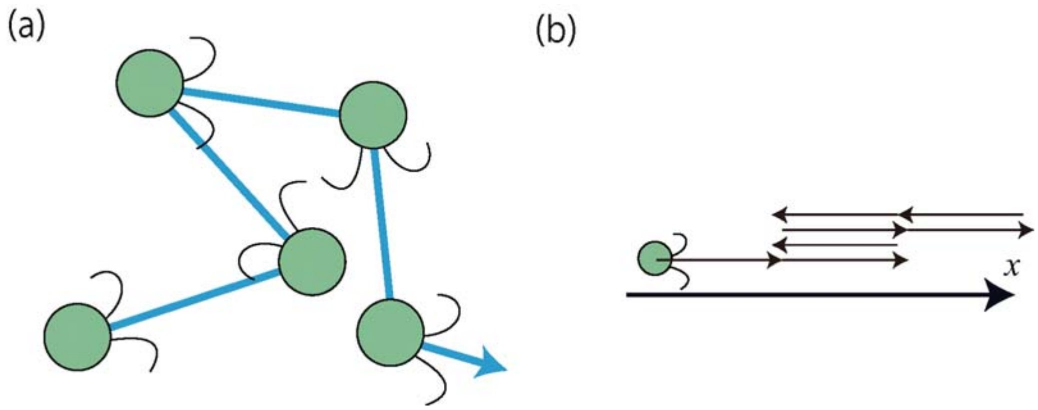
Σχ.3: Ιστόγραμμα των μετατοπίσεων.

D.1	Εκτιμήστε την τιμή του N_A χωρίς να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι είναι η σταθερά Avogadro, με προσέγγιση δύο σημαντικών ψηφίων από τα δεδομένα του Σχήματος 3. Η σταθερά των αερίων είναι $R = 8.31$ J/K $\cdot$ mol. Μην χρησιμοποιήσετε την τιμή της k (σταθερά Boltzmann) πουδίονεται στις Γενικές Οδηγίες. Σημειώστε ότι για τον αριθμό Avogadro, ενδέχεται να καταλήξετε σε μια τιμή διαφορετική από εκείνη που δίνεται στις Γενικές Οδηγίες.	1.0pt

Τώρα επεκτείνουμε το μοντέλο του μέρους Β για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου με φορτίο Q υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου E. Η ταχύτητα του σωματιδίου $v(t)$ που εξετάζεται στην εξίσωση (2) πρέπει να αντικατασταθεί από την $v(t) = u + v_n\ (t_{n-1} < t \leq t_n)$ με το v_n να ικανοποιεί την εξίσωση (3) και το u να είναι η τελική ταχύτητα που εξετάζεται στην εξίσωση (5).

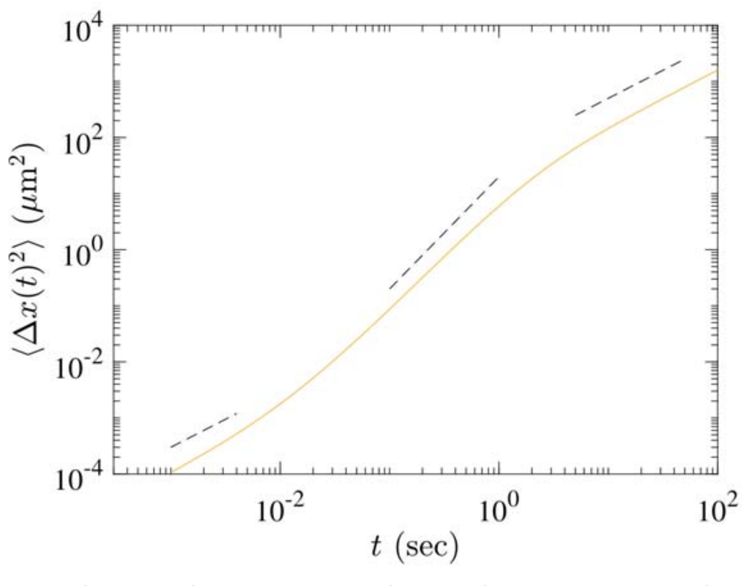
D.2	Εκφράστε το MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ ως προς u, D και t. Βρείτε προσεγγιστικούς νόμους ισχύος για μικρά t και μεγάλα t, καθώς και τον χαρακτηριστικό χρόνο t_* όπου συμβαίνει αυτή η αλλαγή. Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της MSD σε λογαριθμικούς άξονες (λογαριθμικό χαρτί), υποδεικνύοντας την κατά προσέγγιση θέση του t_*.	0.8pt

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τα μικρόβια που κολυμπούν (Σχήμα 4(α)), σε μία διάσταση για λόγους απλότητας (Σχήμα 4(β)). Πρόκειται για σφαιρικά σωματίδια με ακτίνα a. Κολυμπούν με ταχύτητα είτε $+u_0$ είτε$-u_0$, το πρόσημο επιλέγεται τυχαία σε κάθε χρονικό διάστημα δ_0 χωρίς συσχέτιση. Η παρατηρούμενη κίνηση είναι ένας συνδυασμός των μετατοπίσεων που οφείλονται στην κολύμβηση και εκείνων που οφείλονται στην κίνηση Brown ενός σφαιρικού σωματιδίου.



Σχήμα 4: (α) Κίνηση μικροβίων. (β) Η μονοδιάστατη εκδοχή της.

D.3 Στο σχήμα 5 παρουσιάζεται η MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ αυτών των μικροβίων, που αντιστοιχεί σε διαφορετικές πολυωνυμικές συναρτήσεις για μικρές, μεγάλες, και ενδιάμεσες τιμές του t, όπως υποδεικνύεται με τις διακεκομμένες γραμμές. Βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση για καθένα από τα τρία χρονικά διαστήματα, χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες ποσότητες από τις D, u_0, δ_0, και t. 0.6pt



Σχήμα 5: Μέση τετραγωνική μετατόπιση των μικροβίων.

Μέρος Ε. Καθαρισμός νερού (1,5 μονάδες)

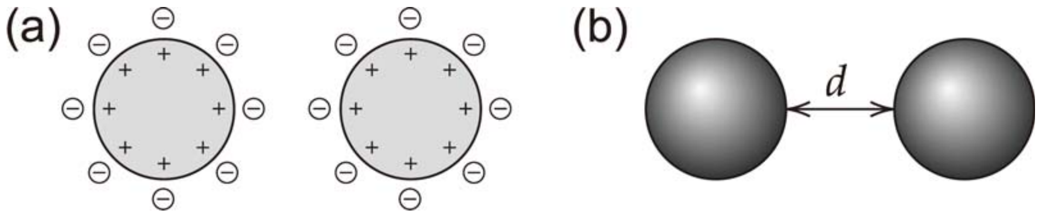
Εδώ συζητάμε τον καθαρισμό του νερού, συμπεριλαμβανομένων σωματιδίων χώματος (που παρουσιάζουν κολλοειδή συμπεριφορά), με την προσθήκη ηλεκτρολυτών για την πήξη τους. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μέσω της δύναμης van der Waals και της ηλεκτροστατικής δύναμης, η οποία περιλαμβάνει τις επιδράσεις τόσο των επιφανειακών φορτίων όσο και του περιβάλλοντος στρώματος ετερόσημα φορτισμένων ιόντων. Τα αντίθετα αυτά ιόντα σχηματίζουν στοιβάδα, που ονομάζεται ηλεκτρική διπλή στοιβάδα, Σχήμα 6(α). Ως αποτέλεσμα, το δυναμικό αλληλεπίδρασης για την απόσταση των σωματιδίων d (Σχ. 6(β)) δίνεται από τη σχέση

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

όπου A και B είναι θετικές σταθερές, ϵ είναι η διηλεκτρική σταθερά του νερού και λ είναι το πάχος της διπλής στοιβάδας. Υποθέτοντας ότι τα φορτία των ιόντων είναι $\pm q$, έχουμε

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}} \tag{7}$$

όπου c η μοριακή συγκέντρωση του ιόντος.



Σχήμα 6: (α) Επιφανειακά φορτία κολλοειδών σωματιδίων και αντι-ιόντων. (β) Ορισμός της απόστασης d.

E.1	Η προσθήκη χλωριούχου νατρίου (NaCl) στο εναιώρημα προκαλεί την πήξη των κολλοειδών σωματιδίων. Προσδιορίστε τη χαμηλότερη συγκέντρωση c του NaCl που είναι απαραίτητη για την πήξη. Αρκεί να θεωρήσουμε δύο σωματίδια χωρίς θερμικές διακυμάνσεις, δηλαδή $F(t) = 0$ στην Εξίσωση (1), και να υποθέσουμε ότι η τελική ταχύτητα για τη δεδομένη εξωτερική δύναμη επιτυγχάνεται ακαριαία.	1.5pt

Χαρακτηρισμός των κολλοειδών του εδάφους (10 μονάδες)

Μέρος A. Κινήσεις κολλοειδών σωματιδίων (1,6 μονάδες)

A.1 (0.8pt)

$v_0 =$

$\tau =$

A.2 (0.8pt)

$v(t) =$

η ανισότητα που καθορίζει το εύρος τιμών του t_i που πρέπει να ληφθεί υπόψη:

Μέρος B. Πραγματική εξίσωση κίνησης (1,8 μονάδες)

B.1 (1.0pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο το C, δ, t)

$\langle \Delta x(t) \rangle =$

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

B.2 (0.8pt)

$\alpha =$

$\beta =$

Μέρος Γ. Ηλεκτροφόρηση (2,7 μονάδες)

C.1 (0.5pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο τα $v, \delta, n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$)

$N_+(x_0) =$

C.2 (0.7pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο τα $C, \delta, n(x_0)$, $\frac{dn}{dx}(x_0)$)

$J_D(x_0) =$

(χρησιμοποιήστε μόνο τα C, δ)

$D =$

(χρησιμοποιήστε μόνο τα D, t)

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

C.3 (0.5pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο το $n(x), T, Q, E, k$)

$\frac{dn}{dx}(x) =$

C.4 (0.5pt)

$\langle v(t) \rangle =$

$u =$

C.5 (0.5pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο το k, γ, T)

$D =$

Μέρος Δ. Μέση τετραγωνική μετατόπιση (2,4 μονάδες)

D.1 (1.0pt)

$N_A =$

D.2 (0.8pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο το u, D, t)

για το γενικό t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

για μικρά t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$

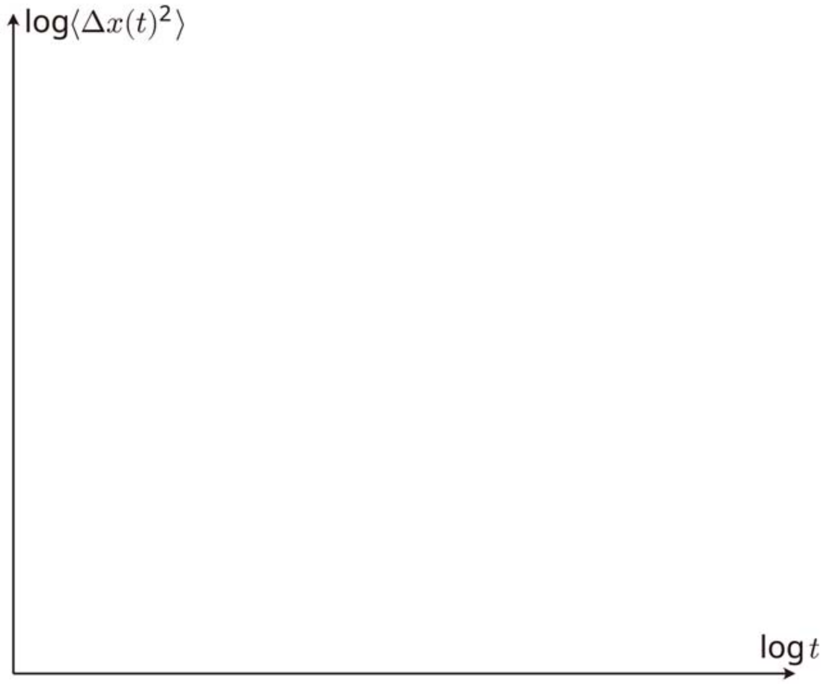
για μεγάλα t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$

ο χαρακτηριστικός χρόνος t_*:

$t_* =$

Γραφική παράσταση σε λογαριθμικό χαρτί του $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ σε συνάρτηση με το t:
(αναφέρετε επίσης την κατά προσέγγιση θέση του t_* στο γράφημα)



D.3 (0.6pt)
(χρησιμοποιήστε μόνο τα D, u_0, δ_0, t)

για μικρά t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

για μεσαία t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

για μεγάλα t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

Μέρος E. Καθαρισμός νερού (1,5 μονάδες)

E.1 (1.5pt)

$c =$

Solution / marking scheme – Characterizing Soil Colloids (10 points)

General rules
- In the following, “coefficients” refer to the numerical factors and do not include parameters.

General rules for carryover points
- No points inside a single question.
- Only wrong answers on the answer sheet are considered.
- Answers with wrong dimensions are not considered.

Part A. Analysis of motions of colloidal particles (1.6 points)

A.1 (total 0.8 pt)

(0.4 pt)

$$v_0 = \frac{I_0}{M}$$

partial points

(0.2 pt) $Mv_0 = I_0$ (A.1.1)

(0.4 pt)

$$\tau = \frac{M}{\gamma}$$

- 0.4pt if the answers are $v_0 = M/\gamma$ and $\tau = I_0/M$.

partial points

(0.2 pt) $M\dot{v} = -\gamma v(t)$ (A.1.2)

A.2 (total 0.8 pt)

(0.8 pt)

$$v(t) = \sum_{i\ s.t.\ 0<t_i<t} \frac{I_i}{M} e^{-(t-t_i)/\tau}$$

- 0.4pt if $\frac{I_i}{M}e^{-(t-t_i)/\tau}$ is written. The subscript can be any dummy variable used in the summation symbol.
- 0.2pt if sum is taken (if Σ is written).
- 0.2pt if the range of sum is correct (equality can be included).
Other acceptable examples: $\sum_i \cdots (t_i < t)$, $\sum_{i=1}^{n} \cdots (t_n < t)$ or $(t_n < t < t_{n+1})$
- Inequality on t in the worksheet is not sufficient to give a point. It must be written as the range of sum.
- $\tau = M/\gamma$ can be substituted.

Part B. Effective equation of motion (1.8 points)

B.1 (total 1.0 pt)
Usable letters: C, δ, t

(0.5 pt)

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0$$

(0.5 pt)

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t$$

partial points

$$\text{(0.3 pt)} \quad \Delta x(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n \delta \tag{B.1.1}$$

- 0.2pt if δ is missing.

$$\text{(0.2 pt)} \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = \sum_{n=1}^{N} C\delta^2 = NC\delta^2 = C\delta t \tag{B.1.2}$$

- 0.2pt only if $C\delta t$ is written. 0.1pt if only $\sum_{n=1}^{N} C\delta^2$ or $NC\delta^2$ is written.

B.2 (total 0.8 pt)

(0.4 pt)

$$\alpha = -1$$

(0.4 pt)

$$\beta = 1$$

Part C. Electrophoresis (2.7 points)

C.1 (total 0.7 pt)
Usable letters: $v, \delta, p(v), n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$

(0.7 pt)

$$j_D(x_0, v) = -p(v)\frac{dn}{dx}(x_0)v^2\delta$$

partial points

$$(0.5\text{ pt})\quad j_+(x_0, v) = \frac{1}{\delta}\int_{x_0 - v\delta}^{x_0} p(v)n(x)dx \simeq p(v)\left[n(x_0)v - \frac{1}{2}\frac{dn}{dx}(x_0)v^2\delta\right] \tag{C.1.1}$$

$$j_-(x_0, v) = \frac{1}{\delta}\int_{x_0}^{x_0 + v\delta} p(v)n(x)dx \simeq p(v)\left[n(x_0)v + \frac{1}{2}\frac{dn}{dx}(x_0)v^2\delta\right] \tag{C.1.2}$$

- 0.5pt if either the rightmost result of (C.1.1) or (C.1.2) is written.
(reduced to 0.3pt if δ or A or both are multiplied unnecessarily)
- 0.3pt if only the intermediate equation (the one with integral) in (C.1.1) or (C.1.2) is written.
(reduced to 0.2pt if δ or A or both are multiplied unnecessarily)
- 0.3pt if $j_\pm(x_0, v) = p(v)n(x_0 \mp v\delta/2)v$ is written instead of the integral.
(reduced to 0.2pt if δ or A or both are multiplied unnecessarily)

C.2 (total 0.5 pt)
Usable letters: C, δ

(0.3 pt)

$$D = \frac{1}{2}C\delta$$

- 0.2pt if the coefficient is wrong.

partial points

$$(0.2\text{ pt})\quad J_D(x) \simeq -\frac{1}{2}\frac{dn}{dx}(x)C\delta \tag{C.2.1}$$

- 0.1pt if the sign or the coefficient is wrong.

Usable letters: D, t

(0.2 pt)

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt$$

partial points

- No point if the answer includes C or δ.

C.3 (total 0.5 pt)
Usable letters: $n(x), T, Q, E, k$

(0.5 pt)

$$\frac{dn}{dx} = \frac{n(x)}{kT} QE$$

partial points

$$\text{(0.3 pt)} \quad \Pi(x)A + n(x)A\Delta x QE = \Pi(x+\Delta x)A \tag{C.3.1}$$

C.4 (total 0.5 pt)

(0.3 pt)

$$\langle v(t)\rangle = \frac{QE}{\gamma}(1 - e^{-t/\tau})$$

- $\tau = M/\gamma$ can be substituted.

partial points

$$\text{(0.3 pt)} \quad M\frac{d\langle v(t)\rangle}{dt} = -\gamma\langle v(t)\rangle + QE \tag{C.4.1}$$

(0.2 pt)

$$u = \frac{QE}{\gamma}$$

C.5 (total 0.5 pt)
Usable letters: k, γ, T

(0.5 pt)

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

partial points

$$\text{(0.2 pt)} \quad J_D(x) = -\frac{DQE}{kT} n(x) \tag{C.5.1}$$

$$\text{(0.2 pt)} \quad J_Q(x) = \frac{QE}{\gamma} n(x) \tag{C.5.2}$$

Part D. Mean square displacement (2.4 points)

D.1 (total 1.0 pt)

(1.0 pt)

$N_A = 5.6 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$

- No reduction if the unit is missing.
- 0.8pt if the second digit is wrong but the value is in the range $5.5\text{–}5.7 \times 10^{23}$.

partial points

$$(0.5\ \mathrm{pt}) \quad \langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT\Delta t}{3\pi a \eta N_A} \tag{D.1.1}$$

- 0.3pt if both the answer of C.2 ($\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\Delta t$) and that of C.5 ($D = \frac{kT}{\gamma}$) are given in the worksheet for D.1. The combination of them ($\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{2kT\Delta t}{\gamma}$) is also acceptable. $k = R/N_A$ and $\gamma = 6\pi a \eta$ can be substituted here.
- No reduction if t is used for Δt.

$$(0.3\ \mathrm{pt}) \quad \langle \Delta x^2 \rangle = 6.34\ \mu\mathrm{m}^2 \tag{D.1.2}$$

- No reduction if the value is in the range $6.2\text{–}6.4\ \mu\mathrm{m}^2$.
- 0.2pt if the unit is missing or wrong.

D.2 (total 0.8 pt)
Usable letters: u, D, t

(0.2 pt)

$$\langle \Delta x^2 \rangle = (ut)^2 + 2Dt$$

(0.2 pt)

$$\langle \Delta x^2 \rangle \propto \begin{cases} t & \text{for small } t \\ t^2 & \text{for large } t \end{cases}$$

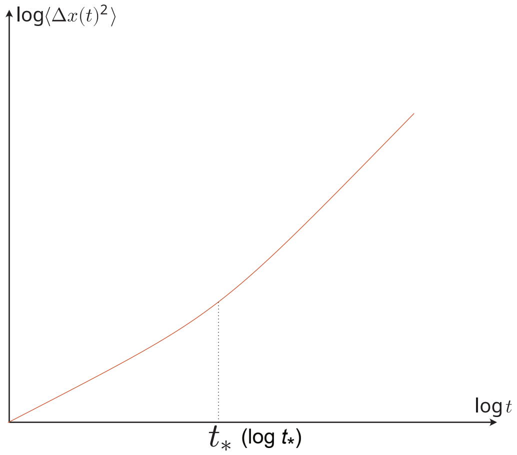
- 0.1pt independently for each answer.

(0.2 pt)

$$t_* = \frac{2D}{u^2}$$

(0.2 pt)

Points are given according to the criteria given below.



- 0.1pt if the graph is monotonically increasing and convex (no points if there are multiple curves that look like the answered graph)
- 0.1pt if t_* is written between the two power-law regions (the label can be either t_* or $\log t_*$).

D.3 (total 0.6 pt)

(0.6 pt)

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \begin{cases} 2Dt & \text{for small } t \\ u_0^2 t^2 & \text{for intermediate } t \\ (u_0^2 \delta) t & \text{for large } t \end{cases}$$

- 0.2pt independently for each answer.
- Wrong answer in B.1 is not considered.

Part E. Water purification (1.5 points)

E.1 (total 1.5 pt)

(1.5 pt)

$$c = \frac{8B^2\epsilon^3(kT)^5}{e^4 N_A A^2 q^6}$$

- 1.3pt if only the coefficient is wrong (e is a part of the coefficient) (then no further partial point is given)

partial points

$$(0.5\ \text{pt}) \quad \min U'(d) = 0 \tag{E.1.1}$$

- No point for $U'(d) = 0$ solely (without indicating what d to consider) or $U'(a) = 0$.
- 0.2pt if the graph of the potential with an energy barrier (the graph first increases monotonically, then decreases monotonically) is drawn (this is the potential for $c < c_*$)
- independently, 0.2pt if the graph of the potential without an energy barrier (the graph increases monotonically) is drawn (this is the potential for $c > c_*$)

$$(0.2\ \text{pt}) \quad U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2\lambda}e^{-d/\lambda} = 0 \tag{E.1.2}$$

$$(0.2\ \text{pt}) \quad U''(d) = -\frac{2A}{d^3} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2\lambda^2}e^{-d/\lambda} = 0 \tag{E.1.3}$$

- 0.2pt (out of the 0.4pt right above) if both $U'(d) = 0$ and $U''(d) = 0$ are written as simultaneous equations, without their correct explicit forms.

$$(0.2\ \text{pt}) \quad d = 2\lambda = \sqrt{\frac{Aq^2\lambda}{B\epsilon(kT)^2}} \tag{E.1.4}$$

$$(0.3\ \text{pt}) \quad \lambda = \frac{e^2 A q^2}{4B\epsilon(kT)^2} \tag{E.1.5}$$

- 1.4pt is given in total if (E.1.5) is written.
- 1.2pt if only the coefficient is wrong (e is a part of the coefficient)

E.1 (cont.)

Another solution: it is also physically reasonable to consider $\max U(d) = 0$ instead of (E.1.1), though this does not meet the requirements given in the question. Therefore, partial points may be given as follows if the question is answered along this line.

partial points

$$(0.5\text{ pt}) \quad \max U(d) = 0 \tag{E.1.6}$$

- No point for $U(d) = 0$ solely (without indicating what d to consider) or $U(a) = 0$.
- 0.2pt if the graph of the potential with an energy barrier that is higher than $U = 0$ or $U(d \to \infty)$ is drawn (this is the potential for $c < c_*$)
- independently, 0.2pt if the graph of the potential with an energy barrier that is lower than $U = 0$ or $U(d \to \infty)$ is drawn (this is the potential for $c > c_*$)

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda} = 0 \tag{E.1.7}$$

$$(0.2\text{ pt}) \quad U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2\lambda} e^{-d/\lambda} = 0 \tag{E.1.8}$$

- No point for (E.1.7)
- 0.2pt if both $U(d) = 0$ are $U'(d) = 0$ are written as simultaneous equations

$$(0.5\text{ pt}) \quad d = \lambda = \frac{eAq^2}{B\epsilon(kT)^2} \tag{E.1.9}$$

- 1.2pt is given in total if (E.1.9) is written.
- 1.0pt if only the coefficient is wrong (e is a part of the coefficient)

$$(0.1\text{ pt}) \quad c = \frac{B^2\epsilon^3(kT)^5}{2e^2 N_A A^2 q^6} \tag{E.1.10}$$

- 1.3pt is given in total if (E.1.10) is written.
- 1.1pt if only the coefficient is wrong (e is a part of the coefficient)