Ενδεικτική λύση του πειραματικού θέματος που τέθηκε στην «Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής 2004»

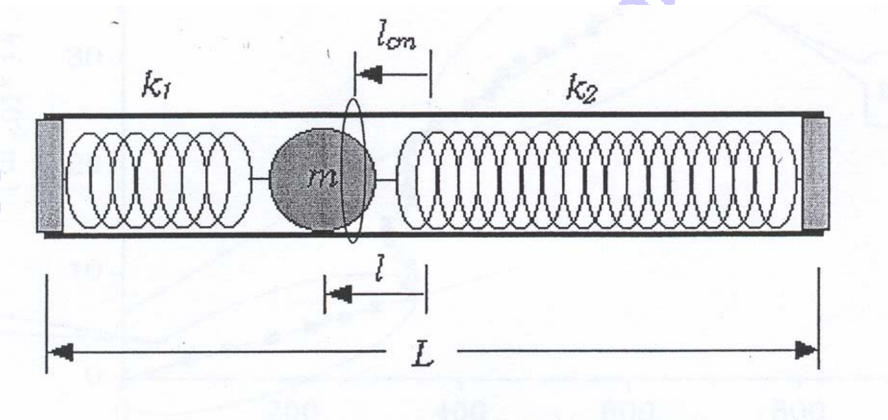
ΜΕΡΟΣ –Α Γινόμενο της μάζας και της θέσης της μπάλλας (mxl) (4.0 μόρια)

1. Προτείνετε και αιτιολογήστε, με τη χρήση εξισώσεων, μια μέθοδο η οποία να επιτρέπει τον προσδιορισμό του mxl. (2.0 μόρια)

   Απάντηση: $m \times l = (M+m) \times l_{cm}$

   Εξήγηση:

   Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα των μοχλών στο μηχανικό "μαύρο κουτί", του σχήματος Α-1, αφού βρούμε τη θέση του κέντρου μάζας ολόκληρου του συστήματος.



Εικόνα. Α-1 Μηχανικό μαύρο κουτί ΜΜΚ

2. Πειραματικός προσδιορισμός της τιμής του mxl. (2.0 μόρια)

   Απάντηση: $m \times l = 2.96 \times 10^{-3}\,\text{kg·m}$

   Εξήγηση:

   Μετρήθηκε η μάζα του συστήματος και βρέθηκε:

   $M+m = (1.411 \pm 0.0005) \times 10^{-1}\,\text{kg}$

   Η δε θέση του κέντρου μάζας: $l_{cm} = (2.1 \pm 0.06) \times 10^{-2}\,\text{m}$ ή $21 \pm 0.6\,\text{mm}$.

   Οπότε: $m \times l = (M+m) \times l_{cm}$

   $= (1.411 \pm 0.0005) \times 10^{-1}\,\text{kg} \times (2.1 \pm 0.06) \times 10^{-2}\,\text{m}$

   $= (2.96 \pm 0.08) \times 10^{-3}\,\text{kg·m}$

ΜΕΡΟΣ –Β Η μάζα m της μπάλλας (10.0 μόρια)

1. Μετρείστε την ταχύτητα v του βαριδιού για διάφορες τιμές της μετατόπισής του h. Χαράξετε την κατάλληλη γραφική παράσταση από την οποία να μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή του m. (4.0 μόρια)
2. Δείξτε ότι οι μετρήσεις σας συμφωνούν με το γεγονός ότι το h είναι ανάλογο με το v^2 δηλ $h=C\,v^2$ όταν η περιστροφή είναι αργή, και $h=Av^2+B$ όταν η περιστροφή είναι γρήγορη. (1.0 μόριο)

   Απάντηση:

Πίνακας πειραματικών δεδομένων:

	h_1(x10^{-2}m) a)	Δt (ms)	h(x10^{-2}m) b)	v(x10^{-2}m/s) c)	v^2(x10^{-4}m^2/s^2)
1	25.5 ± 0.1	269.4 ± 0.05	1.8 ±0.1	8.75 ± 0.02	76.6 ± 0.2
2	26.5 ± 0.1	235.7 ± 0.05	2.8 ± 0.1	11.12 ± 0.02	123.7 ± 0.3
3	27.5 ± 0.1	197.9 ± 0.05	3.8 ± 0.1	13.24 ± 0.03	175.3 ± 0.6
4	28.5 ± 0.1	176.0 ± 0.05	4.8 ± 0.1	14.89 ± 0.03	221.7 ± 0.6
5	29.5 ± 0.1	161.8 ± 0.05	5.8 ± 0.1	16.19 ± 0.03	262.1 ± 0.7
6	30.5 ± 0.1	151.4 ± 0.05	6.8 ± 0.1	17.31 ± 0.03	299.6 ± 0.7
7	31.5 ± 0.1	141.8 ± 0.05	7.8 ± 0.1	18.48 ± 0.04	342 ± 1
8	32.5 ± 0.1	142.9 ± 0.05	8.8 ± 0.1	18.33 ± 0.04	336 ± 1
9	33.5 ± 0.1	141.4 ± 0.05	9.8 ± 0.1	18.53 ± 0.04	343 ± 1
10	34.5 ± 0.1	142.2 ± 0.05	10.8 ± 0.1	18.42 ± 0.04	339 ± 1
11	35.5 ± 0.1	142.2 ± 0.05	10.8 ± 0.1	18.42 ± 0.04	339 ± 1
12	36.5 ± 0.1	147.8 ± 0.05	12.8 ± 0.1	17.73 ± 0.04	314 ± 1
13	37.5 ± 0.1	148.3 ± 0.05	13.8 ± 0.1	17.67 ± 0.04	312 ± 1
14	38.5 ± 0.1	148.0 ± 0.05	14.8 ± 0.1	17.70 ± 0.04	313 ± 1
15	39.5 ± 0.1	143.9 ± 0.05	15.8 ± 0.1	18.21 ± 0.04	332 ± 1
16	40.5 ± 0.1	141.9 ± 0.05	16.8 ± 0.1	18.46 ± 0.04	341 ± 1
17	41.5 ± 0.1	142.9 ± 0.05	17.8 ± 0.1	18.33 ± 0.04	336 ± 1
18	42.5 ± 0.1	141.9 ± 0.05	18.8 ± 0.1	18.46 ± 0.04	341 ± 1
19	43.5 ± 0.1	142.8 ± 0.05	19.8 ± 0.1	18.35 ± 0.04	337 ± 1
20	44.5 ± 0.1	144.3 ± 0.05	20.8 ± 0.1	18.16 ± 0.04	330 ± 1
21	45.5 ± 0.1	142.2 ± 0.05	21.8 ± 0.1	18.42 ± 0.04	339 ± 1
22	46.5 ± 0.1	139.8 ± 0.05	22.8 ± 0.1	18.74 ± 0.04	351 ± 1
23	47.5 ± 0.1	136.7 ± 0.05	23.8 ± 0.1	19.17 ± 0.04	368 ± 1
24	48.5 ± 0.1	133.0 ± 0.05	24.8 ± 0.1	19.70 ± 0.04	388 ± 1
25	49.5 ± 0.1	129.5 ± 0.05	25.8 ± 0.1	20.3 ± 0.04	409 ± 1
26	50.5 ± 0.1	125.7 ± 0.05	26.8 ± 0.1	20.84 ± 0.04	434 ± 1
27	51.5 ± 0.1	124.3 ± 0.05	27.8 ± 0.1	21.08 ± 0.04	444 ± 1
28	52.5 ± 0.1	123.4 ± 0.05	28.8 ± 0.1	21.23 ± 0.04	451 ± 1
29	53.5 ± 0.1	120.9 ± 0.05	29.8 ± 0.1	21.67 ± 0.04	470 ± 1
30	54.5 ± 0.1	117.5 ± 0.05	30.8 ± 0.1	22.30 ± 0.04	497 ± 1
31	55.5 ± 0.1	114.0 ± 0.05	31.8 ± 0.1	22.98 ± 0.04	528 ± 1
32	56.5 ± 0.1	111.2 ± 0.05	32.8 ± 0.1	23.56 ± 0.05	555 ± 2
33	57.5 ± 0.1	110.5 ± 0.05	33.8 ± 0.1	23.71 ± 0.05	562 ± 2
34	58.5 ± 0.1	108.1 ± 0.05	34.8 ± 0.1	24.24 ± 0.05	588 ± 2
35	59.5 ± 0.1	107.1 ± 0.05	35.8 ± 0.1	24.46 ± 0.05	598 ± 2
36	60.5 ± 0.1	104.6 ± 0.05	36.8 ± 0.1	25.05 ± 0.05	628 ± 2
37	61.5 ± 0.1	102.1 ± 0.05	37.8 ± 0.1	25.66 ± 0.05	658 ± 2
38	62.5 ± 0.1	100.1 ± 0.05	38.8 ± 0.1	26.17 ± 0.05	685 ± 2
39	63.5 ± 0.1	99.6 ± 0.05	39.8 ± 0.1	26.31 ± 0.05	692 ± 2
40	64.5 ± 0.1	97.3 ± 0.05	40.8 ± 0.1	26.93 ± 0.05	725 ± 2
41	65.5 ± 0.1	95.8 ± 0.05	41.8 ± 0.1	27.35 ± 0.05	748 ± 2
42	66.5 ± 0.1	94.7 ± 0.05	42.8 ± 0.1	27.67 ± 0.05	766 ± 2
43	67.5 ± 0.1	94.0 ± 0.05	43.8 ± 0.1	27.87 ± 0.06	777 ± 2
44	68.5 ± 0.1	92.9 ± 0.05	44.8 ± 0.1	28.20 ± 0.06	795 ± 2
45	69.5 ± 0.1	91.1 ± 0.05	45.8 ± 0.1	28.76 ± 0.06	827 ± 2

Όπου:

α) h_1 είναι το ύψος της επάνω πλευράς του βαριδιού πριν αυτό αρχίσει να πέφτει.

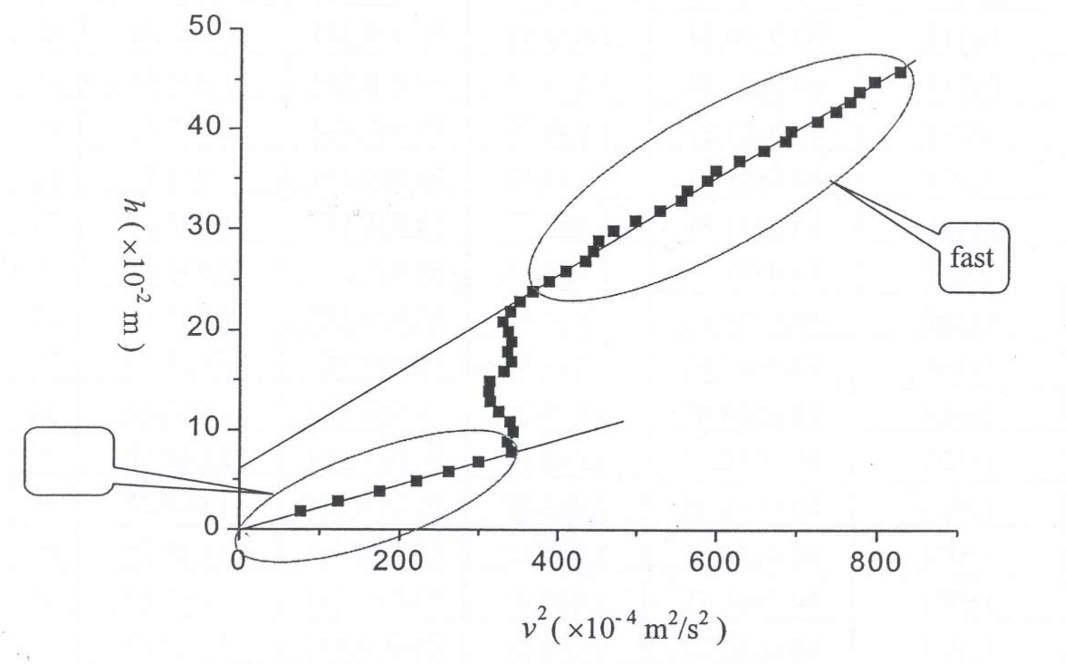
b) h είναι η μετατόπιση του βαριδιού η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$h=h_1-h_2+d/2$,

$h_2=(25\pm0.05)\mathrm{x}10^{-2}\mathrm{m}$ είναι το ύψος της επάνω πλευράς του βαριδιού τη στιγμή που αρχίζει να μπλοκάρει την φωτοπύλη,

$d=(2.62\pm0.005)\mathrm{x}10^{-2}\mathrm{m})$ είναι το μήκος του βαριδιού, και

c) v η ταχύτητα που προκύπτει από το πηλίκο $v= d/\Delta t$.



Εικόνα Β-1 Πειραματικά δεδομένα.

3. Να βρείτε τη δχέση που συνδέει τον συντελεστή C με τις παραμέτρους του μηχανικού μαύρου κουτιού. (1.0 μόριο)

Απάντηση: $h=Cv^2$, όπου $C=\{m_0+I/R^2+m(l^2+2/5r^2)/R^2\}/2m_0g$

Εξήγηση:

Η μπάλλα είναι σε στατική ισορροπία ($x=l$). Όταν η ταχύτητα του βαριδιού είναι v, η αύξηση στην κινητική ενέργεια όλου του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta K=1/2m_0v^2+1/2I\omega^2+1/2m(l^2+2/5r^2)\omega^2$$

$=1/2\ \{m_0+I/R^2+m(l^2+2/5r^2)/R^2\}v^2$, όπου ω=v/R είναι η γωνιακή ταχύτητα του μηχανικού μαύρου κουτιού και I είναι η ροπή αδράνειας όλου του συστήματος εκτός της μπάλλας.

Αφού η μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του βαριδιού είναι: $\Delta U=-mgh$,

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας ($\Delta K+\Delta U=0$) δίνει:

$h=1/2\{m_0+I/R^2+m(l^2+2/5r^2)/R^2\}v^2/m_0g$

$=Cv^2$, όπου $C=\{m_0+I/R^2+m(l^2+2/5r^2)/R^2\}/2m_0g$

4. Βρείτε τη σχέση των συντελεστών A και B με τις παραμέτρους του μηχανικού μαύρου κουτιού όπως m,l κλπ.(1.0 μόριο)

Απάντηση: $h=Av^2+B$, όπου $A=[m_0+I/R^2+m\{(L/2\text{-}\delta\text{-}r)^2+2/5r^2\}/R^2]/2m_0g$
και $B=[-k_1(L/2\text{-}l\text{-}\delta\text{-}r)^2+k_2\{(L\text{-}2\delta\text{-}2r)^2\text{-}(L/2+l\text{-}\delta\text{-}r)^2\}]/2m_0g$

Εξήγηση:
Η μπάλλα στέκεται στο τελευταίο διάκενο του σωλήνα ($x=L/2\text{-}\delta\text{-}r$). Όταν η ταχύτητα του βαριδιού είναι v, η αύξηση της κινητικής ενέργειας όλου του συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$K=1/2[m_0+I/R^2+m\{(L/2\text{-}\delta\text{-}r)^2+2/5\ r^2\}/R^2]v^2$.

Αφού η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι:

$\Delta U_e=1/2[-k_1(L/2\text{-}l\text{-}\delta\text{-}r)^2+k_2\{(L\text{-}2\delta\text{-}2r)^2\text{-}(L/2+l\text{-}\delta\text{-}r)^2\}]$,

Η διατήρηση της ενέργειας ($K+\Delta U+\Delta U_e=0$) δίνει:

$h=1/2[m_0+I/R^2+m\{(L/2\text{-}\delta\text{-}r)^2+2/5r^2\}/R^2\}]v^2/m_0g+\Delta U_e/mg$

$= Av^2+B$,

όπου:

$A=[m_0+I/R^2+m\{(L/2\text{-}\delta\text{-}r)^2+2/5r^2\}/R^2\}]/2m_0g$ και

$B=[-k_1(L/2\text{-}l\text{-}\delta\text{-}r)^2+k_2\{(L\text{-}2\delta\text{-}2r)^2\text{-}(L/2+l\text{-}\delta\text{-}r)^2\}]/2m_0g$.

5. Προσδιορίστε την τιμή του m από τις μετρήσεις σας και από τα αποτελέσματα που βρήκατε στο Α-ΜΕΡΟΣ (3.0 μόρια)

Απάντηση: $m=6.2\text{x}10^{-2}$kg

Εξήγηση: Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο ΜΕΡΟΣ-Β 3 και παίρνουμε:

$$A\text{-}C = \frac{m}{2gm_0R^2}\{(L/2-\delta\text{-}r)^2\text{-}l^2\}.$$

Οι μετρούμενες τιμές είναι $L=(40.0\pm0.05)\text{x}10^{-2}$ m
$m_o=(100.4\pm0.05)\text{x}10^{-3}$kg
$2R=(3.91\pm0.005)\text{x}10^{-2}$ m

Έτσι,
$(L/2\text{-}\delta\text{-}r)^2=\{(20.0\pm0.03)-0.5-1.1\}^2\text{x}10^{-4}\text{m}^2=(338.6\pm0.8)\text{x}10^{-4}\text{m}^2$

και
$2gm_0R^2=2x980x(100.4\pm0.05)x(1.955\pm0.003)^2x10^{-6}$Kg $m^3/s^2=(752\pm2)x10^{-6}$Kg m^3/s^2.
Οι κλίσεις των δύο ευθειών στο διάγραμμα (Εικ. Β-1) του ΜΕΡΟΥΣ-Β είναι:

$A=5.0\pm0.1\ s^2/m$ και $C=2.4\pm0.1\ s^2/m$

Οπότε $A-C=2.6\pm0.1\ s^2/m$.

Αφού ήδη έχει προκύψει $mxl=(M+m)xl_{cm}=2.96\pm10^{-3}$kg m από το ΜΕΡΟΣ –Α, η εξίσωση
$(338.6\pm0.8)m^2-(19600\pm800)m-(88000\pm3000)=0$
προκύπτει με τη μάζα εκπεφρασμένη σε g.
Οι ρίζες της είναι:

$$m=\frac{(9800\pm400)\pm\sqrt{(9800\pm400)^2+(338.6\pm0.8)x(88000\pm3000)}}{(338.6\pm0.8)}$$

Φυσικό νόημα έχει η θετική ρίζα οπότε:

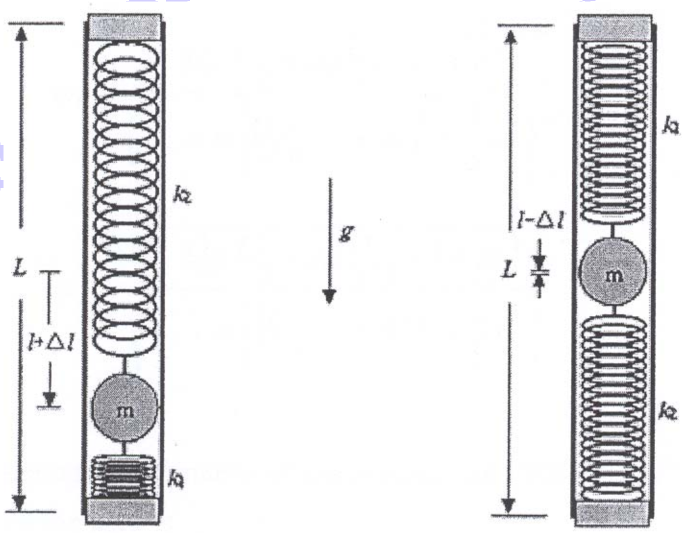
$$m=\frac{(9800\pm400)\pm\sqrt{(126000000\pm6000000)}}{(338.6\pm0.8)}=(62\pm2)g=(6.2\pm0.2)x10^{-2}kg.$$

ΜΕΡΟΣ –Γ Οι σταθερές των ελατηρίων k_1 και k_2 (6.0 μόρια)

1. Μετρείστε τις περιόδους T_1 και T_2 των ταλαντώσεων μικρού πλάτους, όπως φαίνονται στην εικόνα C1 (1) και (2) και γράψτε τις τιμές τους αντίστοιχα. (1.0 μόριο)

Απάντηση: T_1=1.1090s και T_2=1.0193s

Εξήγηση:



(1) (2)

Εικόνα C.1: Ταλαντώσεις μικρού πλάτους.

Οι μετρήσεις για τις περιόδους είναι:

	T_1 (s)		T_2 (s)
1	1.1085±0.00005	1	1.0194±0.00005
2	1.1092±0.00005	2	1.0194±0.00005
3	1.1089±0.00005	3	1.0193±0.00005
4	1.1085±0.00005	4	1.0191±0.00005
5	1.1094±0.00005	5	1.0192±0.00005
6	1.1090±0.00005	6	1.0194±0.00005
7	1.1088±0.00005	7	1.0194±0.00005
8	1.1090±0.00005	8	1.0191±0.00005
9	1.1092±0.00005	9	1.0192±0.00005
10	1.1094±0.00005	10	1.0193±0.00005

Οι μέσες τιμές είναι:

T_1=1.1090 ±0.0003s και T_2=1.0193±0.0001s

2. Εξηγείστε (χρησιμοποιώντας εξισώσεις) γιατί οι κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 των ταλαντώσεων μικρού πλάτους των δύο διατάξεων είναι διαφορετικές.(1.0 μόριο)

Απάντηση:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{MgL/2+mg(L/2+l+\Delta l)}{I_0+m\{(L/2+l+\Delta l)^2+\frac{2}{5}r^2\}}}$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{MgL/2+mg(L/2-l+\Delta l)}{I_0+m\{(L/2-l+\Delta l)^2+\frac{2}{5}r^2\}}}$$

Εξήγηση:

Η ροπή αδράνειας του Μηχανικού “Μαύρου κουτιού” ως προς νοητό άξονα στο πάνω μέρος του σωλήνα είναι:

$I_1=I_0+m\{(L/2+l+\Delta l)^2+\frac{2}{5}r^2\}$ ή $I_2=I_0+m\{(L/2-l+\Delta l)^2+\frac{2}{5}r^2\}$

Ανάλογα με τον προσανατολισμό του ΜΜΚ όπως φαίνεται στην εικόνα C-1(10 και (2), αντίστοιχα.

Όταν το ΜΜΚ εκτρέπεται ελαφρά από την κατακόρυφο κατά μια γωνία θ, η ροπή του βάρους είναι:

$\tau_1 = Mg(L/2)\sin\theta + mg(L/2 + l + \Delta l)\sin\theta \approx \{Mg(L/2) + mg(L/2 + l + \Delta l)\}\theta$

ή

$\tau_2 = Mg(L/2)\sin\theta + mg(L/2 - l + \Delta l)\sin\theta \approx \{Mg(L/2) + mg(L/2 - l + \Delta l)\}\theta$

ανάλογα με τον προσανατολισμό.

Επομένως, οι γωνιακές (κυκλικές) συχνότητες της ταλάντωσης γίνονται:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\tau_1/\theta}{I_1}} = \sqrt{\frac{MgL/2 + mg(L/2 + l + \Delta l)}{I_0 + m\{(L/2 + l + \Delta l)^2 + \frac{2}{5}r^2\}}}$$

και

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\tau_2/\theta}{I_2}} = \sqrt{\frac{MgL/2 + mg(L/2 - l + \Delta l)}{I_0 + m\{(L/2 - l + \Delta l)^2 + \frac{2}{5}r^2\}}} \; .$$

3. Υπολογίστε τη μετατόπιση Δl απαλείφοντας το I_0 από τα προηγούμενα 2αποτελέσματα. (1.0 μόριο)

Απάντηση:

$$\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\left\{\frac{(M+m)gL}{2} + mg\Delta l\right\} + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)mgl = \omega_1^2\omega_2^2 m(L + 2\Delta l)(2l).$$

Εξήγηση:

Από τις δύο εκφράσεις για τις γωνιακές συχνότητες ω_1 και ω_2 έχουμε:

$$MgL/2 + mg(L/2 + l + \Delta l) = I_0\,\omega_1^2 \; + m\,\omega_2^2\,\{(L/2 + l + \Delta l)^2 + \frac{2}{5}r^2\}$$

και

$$MgL/2 + mg(L/2 - l + \Delta l) = I_0\,\omega_1^2 \; + m\,\omega_2^2\,\{(L/2 - l + \Delta l)^2 + \frac{2}{5}r^2\}$$

Μπορούμε να απαλείψουμε την άγνωστη ροπή αδράνειας I_0 του ΜΜΚ χωρίς την σφαίρα. Απαλείφωντας την I_0 παίρνουμε την εξίσωση για το Δl

$$\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\left\{\frac{(M+m)gL}{2}+mg\Delta l\right\}+\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)mgl=\omega_1^2\omega_2^2 m(L+2\Delta l)(2l).$$

4. Συνδιάζοντας τα αποτελέσματα από τα 1,2 και 3 του Μέρους C και του Μέρους B, να βρείτε και να γράψετε την ισοδύναμη ολική σταθερά του συστήματος των δύο ελατηρίων. (2.0 μόρια)

Απάντηση: k = 9N/m

Εξήγηση: Από τις μετρήσεις και τα δεδομένα παίρνουμε:

$$\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)=\left\{\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\right\}=\left(\frac{6.2832}{1.0193\pm0.0001}\right)^2-\left(\frac{6.2832}{1.1090\pm0.0003}\right)^2=5.90\pm0.01s^{-2}$$

$$\frac{(M+m)gL}{2}=\frac{(141.1\pm0.05)\times980\times(40.0\pm0.05)}{2}=(27.66\pm0.04)\times10^{-2}kgm^2/s^2$$

$$\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)mgl=\left\{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2\right\}\ (M+m)l_{cm}g$$

$$=\left\{\left(\frac{6.2832}{1.1090\pm0.0003}\right)^2+\left(\frac{6.2832}{1.0193\pm0.0001}\right)^2\right\}\text{x }(296\pm8)\text{x } 980$$

$$=(203\pm5)\text{x}10^{-2}\text{kg m}^2/\text{s}^4$$

$$\omega_1^2\omega_2^2 ml=\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2(M+m)l_{cm}$$

$$=\left(\frac{6.2832}{1.1090\pm0.0003}\right)^2\left(\frac{6.2832}{1.0193\pm0.0001}\right)^2\times(296\pm8)$$

$$=(3.6\pm0.1)\text{ kg m/s}^4.$$

Επομένως, η εξίσωση που προέκυψε στο Μέρος-C 3 γίνεται:

$(5.90\pm0.01)\{(27.66\pm0.04)\text{x}10^5+(62\pm2)\text{x}980\text{x}\Delta l\}+(203\pm5)\text{x}10^5$

$=(7.2\pm0.2)\text{x}10^5\text{x}\{(40.0\pm0.05)+2\Delta l\}$,

όπου $\Delta l=(7.2\pm0.9)$cm$=(7.2\pm0.9)\text{x}10^{-2}$m

Η ενεργός ολική σταθερά ελατηρίου είναι:

$k \equiv \frac{mg}{\Delta l} = \frac{(62 \pm 2) \times 980}{7.2 \pm 0.9} = 9000 \pm 1000$ dyne/cm ή 9 ± 1 N/m.

5. Υπολογίστε τις τιμές k_1 και k_2 αντίστοιχα. (1.0 μόριο)

Απάντηση:

k_1=5.7 N/m , k_2=3 N/m

Εξήγηση: Όταν το ΜΜΚ είναι σε ισορροπία στο οριζόντιο επίπεδο η συνθήκη ισορροπίας για τη μπάλα είναι:

$k_1\,(L/2-l-\delta-r) = k_2(L/2+l-\delta-r)$

αφού $k=k_1+k_2$, παίρνουμε

$$k_1 = \frac{\frac{L}{2}+l-\delta-r}{L-2\delta-2r}k \qquad \text{και}$$

$$k_2 = k - k_1 = \frac{\frac{L}{2}-l-\delta-r}{L-2\delta-2r}k.$$

Από τις μετρήσεις και τα δεδομένα έχουμε:

$$\frac{\frac{L}{2}+l-\delta-r}{L-2\delta-2r} = \frac{(20.0 \pm 0.03) + \left(\frac{296 \pm 8}{62 \pm 2}\right) - 0.5 - 1.1}{(40.0 \pm 0.05) - 1.0 - 2.2} = 0.63 \pm 0.005.$$

Οπότε:

$k_1=(0.63 \pm 0.005)\text{x}(9000 \pm 1000)=5700 \pm 600$ dyn/cm ή 5.7 ± 0.6 N/m,

και

$k_2=(9000 \pm 1000)-(5700 \pm 600)=3000 \pm 1000$ dyn/cm ή 3 ± 1 N/m.