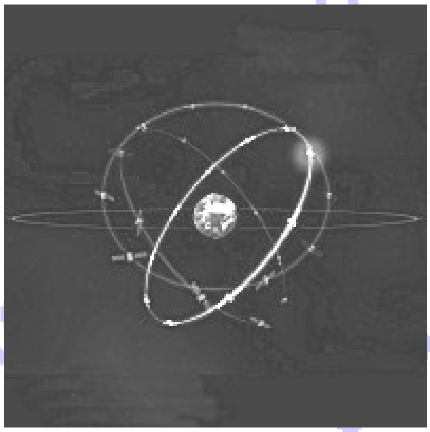
ΘΕΜΑ 1: «ΜΟΙΡΑΙΟΣ» ΔΟΡΥΦΟΡΟΣ

Οι πιο συχνές τροχιακές μανούβρες που γίνονται από τα διαστημικά σκάφη προκαλούνται από μεταβολές της ταχύτητας κατά μήκος της διεύθυνσης της εφαπτομένης της τροχιάς τους, δηλαδή επιταχύνσεις με στόχο τα σκάφη να φτάσουν σε τροχιές μεγαλύτερης ακτίνας ή επιβραδύνσεις που γίνονται με στόχο την επάνοδό τους στην ατμόσφαιρα. Σε αυτό το πρόβλημα θα μελετήσουμε τις μεταβολές της τροχιάς ενός δορυφόρου, όταν εφαρμόζεται σε αυτόν μια ώθηση που προκαλείται από τη μηχανή του.



Εικόνα: ESA

Χρησιμοποιείστε, για τους υπολογισμούς σας, τις εξής σταθερές: Ακτίνα της Γης $R_T = 6.37\cdot 10^6$ m, επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, περίοδος περιστροφής της Γης $T_0 = 24.0\,\mathrm{h}$.

Θεωρείστε ένα τηλεπικοινωνιακό γεωστατικό[1] δορυφόρο μάζας m σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0. Το επίπεδο της τροχιάς του δορυφόρου συμπίπτει με το επίπεδο του ισημερινού. Οι δορυφόροι αυτοί διαθέτουν μια κατάλληλη «απογειακή» μηχανή, η οποία παρέχει την αναγκαία ώθηση στη διεύθυνση της ταχύτητάς του, έτσι ώστε ο δορυφόρος να φτάσει στην τελική του τροχιά.

Οι μονάδες βαθμολογίας σημειώνονται, σε παρένθεση, στην αρχή κάθε υποερώτησης.

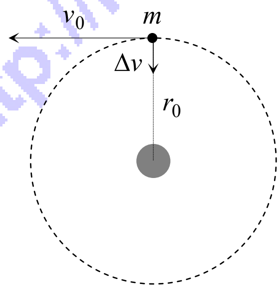
Ερώτημα 1.

1.1 (0.3) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή του r_0.

1.2 (0.3 + 0.1) Βρείτε την αναλυτική σχέση για την ταχύτητα v_0 του δορυφόρου ως συνάρτηση των μεγεθών g, R_T, και r_0. Υπολογίστε, επίσης, την αριθμητική τιμή της v_0

1.3 (0.4 + 0.4) Βρείτε τη σχέση για τη στροφορμή του δορυφόρου L_0 και τη σχέση για τη μηχανική ενέργεια E_0, ως συναρτήσεις των μεγεθών: v_0, m, g and R_T.

Από τη στιγμή που ο δορυφόρος μεταφέρεται στη γεωστατική κυκλική του τροχιά (βλέπε Σχ. 1), αυτός σταθεροποιείται σε αυτή την τροχιά για να χρησιμοποιηθεί ως τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος. Από λάθος στα συστήματα ελέγχου στο έδαφος, προκαλείται ενεργοποίηση της μηχανής του, η οποία δίνει ξανά ώθηση στο δορυφόρο. Η ώθηση αυτή έχει τη διεύθυνση της ακτίνας της Γης, με φορά προς το κέντρο της. Παρά τη γρήγορη αντίδραση των υπευθύνων στο έδαφος για να θέσουν εκτός λειτουργίας τη μηχανή, προκαλείται στο δορυφόρο μια ανεπιθύμητη μεταβολή της ταχύτητας κατά Δv. Χαρακτηρίζουμε αυτή τη μεταβολή με την παράμετρο προώθησης $\beta = \Delta v / v_0$. Η χρονική διάρκεια που η μηχανή προκαλεί αυτή τη μεταβολή είναι πολύ μικρή, έτσι ώστε μπορείτε να τη θεωρήσετε στιγμιαία.



Σχ. 1

Ερώτηση 2

Υποθέστε ότι $\beta < 1$.

2.1 (0.4 + 0.5) Βρείτε, για τη νέα τροχιά[2], την κάθετη απόσταση l από το δορυφόρο στο μεγάλο άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του, που περνά από το κέντρο της Γης, και την εκκεντρότητα ε, σε συνάρτηση με τα μεγέθη r_0 και β.

2.2 (1.0) Υπολογίστε τη γωνία α μεταξύ του μεγάλου άξονα της νέας ελλειπτικής τροχιάς και του διανύσματος θέσης του δορυφόρου στο σημείο που έγινε η ανεπιθύμητη ώθηση.

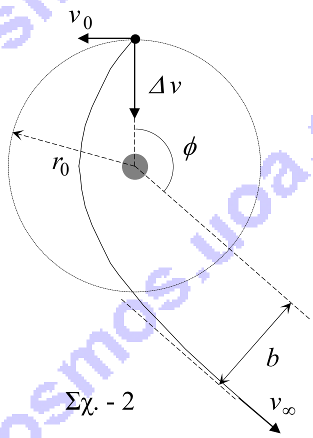
[1] με περίοδο περιστροφής T_0.

[2] Βλέπε Υποδείξεις.

2.3 (1.0 + 0.2) Βρείτε τη σχέση για το περίγειο r_{min} και τη σχέση για το απόγειο r_{max}, (αποστάσεις του δορυφόρου από το κέντρο της Γης), ως συναρτήσεις των μεγεθών r_0 και β. Υπολογίστε, επίσης, τις αριθμητικές τους τιμές όταν, $\beta = 1/4$.

2.4 (0.5 + 0.2) Προσδιορίστε την περίοδο της νέας τροχιάς, T, ως συνάρτηση των μεγεθών T_0 και β. Υπολογίστε, επίσης, την αριθμητική τιμή της περιόδου T, όταν $\beta = 1/4$.

Ερώτηση 3



Σχ. - 2

3.1 (0.5) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου προώθησης, β_{esc}, που απαιτείται ώστε ο δορυφόρος να διαφύγει τελείως από τη βαρυτική έλξη της Γης.

3.2 (1.0) Προσδιορίστε, σε αυτή την περίπτωση, την ελάχιστη απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης, στη νέα τροχιά του, r'_{min}, ως συνάρτηση του r_0.

Ερώτηση 4

Υποθέστε ότι $\beta > \beta_{esc}$.

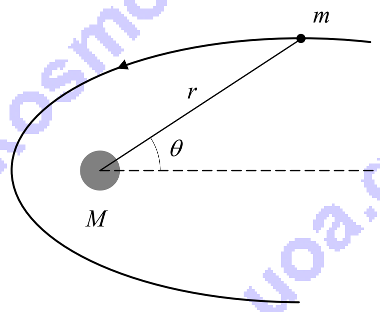
4.1 (1.0) Προσδιορίστε την ταχύτητα του δορυφόρου στο άπειρο, v_∞, ως συνάρτηση των μεγεθών v_0 και β.

4.2 (1.0) Προσδιορίστε την «παράμετρο επίδρασης» b, σύμφωνα με το Σχ. 2 (δηλαδή την απόσταση μεταξύ της ευθείας που περνά από τη Γη και είναι παράλληλη με τη διεύθυνση της v_∞). Η απάντηση να δοθεί ως συνάρτηση των μεγεθών r_0 και β.

4.3 (1.0 + 0.2) Προσδιορίστε τη γωνία ϕ, όπως φαίνεται στο Σχ. 2, ως συνάρτηση του β. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της ϕ όταν $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Υπό την επίδραση κεντρικών δυνάμεων που ικανοποιούν το νόμο του «αντιστρόφου τετραγώνου», τα σώματα ακολουθούν τροχιές με σχήμα έλλειψης, παραβολής ή υπερβολής. Με την προσέγγιση $m << M$, η μάζα M βρίσκεται στη θέση της μιας από τις δύο εστίες, (βλέπε Σχ. 3). Λαμβάνοντας ως αρχή των αξόνων το σημείο αυτής της εστίας, η γενική εξίσωση της τροχιάς που περιγράφει αυτές τις καμπύλες, δίνεται από τη σχέση:



Σχ. 3

$$r(\theta) = \frac{l}{1-\varepsilon\ \cos\theta}$$

όπου l είναι μια θετική σταθερά, που είναι ίση με την κάθετη απόσταση από το δορυφόρο στο μεγάλο άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του, που περνά από το κέντρο της Γης και ε είναι η εκκεντρότητα της καμπύλης. Σε συνάρτηση των σταθερών της κίνησης, έχουμε:

$$l = \frac{L^2}{G M m^2} \qquad \text{και} \qquad \varepsilon = \left(1 + \frac{2 E L^2}{G^2 M^2 m^3}\right)^{1/2}$$

όπου G είναι η σταθερά παγκόσμιας έλξης του Newton, L είναι το μέτρο της στροφορμής της μάζας m , ως προς την αρχή των αξόνων, και E είναι η μηχανική ενέργεια, όπου η δυναμική ενέργεια στο άπειρο παίρνει τη τιμή μ ηδέν.

Μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν $0 \le \varepsilon < 1$, η καμπύλη έχει σχήμα έλλειψης (κύκλος όταν $\varepsilon = 0$).

ii) Αν $\varepsilon = 1$, η καμπύλη έχει σχήμα παραβολής.

iii) Αν $\varepsilon > 1$, η καμπύλη έχει σχήμα υπερβολής.

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

ΘΕΜΑ 1 ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Ερώτηση	Βασικές Σχέσεις και Ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν	Αναλυτικά Αποτελέσματα	Αριθμητικά Αποτελέσματα	Μονάδες βαθμολόγησης
1.1			$r_0 =$	0.3
1.2		$v_0 =$	$v_0 =$	0.4
1.3		$L_0 =$ $E_0 =$		0.4 0.4
2.1		$l =$ $\varepsilon =$		0.4 0.5
2.2			$\alpha =$	1.0
2.3		$r_{max} =$ $r_{min} =$	$r_{max} =$ $r_{min} =$	1.2
2.4		$T =$	$T =$	0.7
3.1			$\beta_{esc} =$	0.5
3.2		$r'_{min} =$		1.0
4.1		$v_\infty =$		1.0
4.2		$b =$		1.0
4.3		$\phi =$	$\phi =$	1.2