ΘΕΜΑ 1: «ΜΟΙΡΑΙΟΣ» ΔΟΡΥΦΟΡΟΣ

1.1 και 1.2

$$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{M_T m}{r_0^2} = m\dfrac{v_0^2}{r_0} \\ v_0 = \dfrac{2\pi r_0}{T_0} \\ g = \dfrac{GM_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_0 = \left(\dfrac{g R_T^2 T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = 4.22\cdot 10^7 \text{ m}} \\ \boxed{v_0 = R_T\sqrt{\dfrac{g}{r_0}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 3.07\cdot 10^3 \text{ m/s}} \end{array}\right.$$

1.3

$$L_0 = r_0 m v_0 = \frac{g R_T^2}{v_0^2} m v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_0 = \frac{m g R_T^2}{v_0}}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_T m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{g R_T^2 m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}$$

2.1

Η τιμή της κάθετης απόστασης l από το δορυφόρο στο μεγάλο άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του, που περνά από το κέντρο της Γης l προκύπτει από το ότι η στροφορμή είναι η ίδια και στις δυό τροχιές. Έτσι έχουμε:

$$l = \frac{L_0^2}{G M_T m^2} = \frac{m^2 g^2 R_T^4}{v_0^2}\frac{1}{g R_T^2 m^2} = \frac{g R_T^2}{v_0^2} = r_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = r_0}$$

Η τιμή της εκκεντρότητας είναι:

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2 E L_0^2}{G^2 M_T^2 m^3}$$

όπου E είναι η νέα μηχανική ενέρεγεια του δορυφόρου.

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \Delta v^2\right) - G\frac{M_T m}{r_0} = \frac{1}{2}m\Delta v^2 + E_0 = \frac{1}{2}m\Delta v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Έτσι έχουμε

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{\Delta v^2}{v_0^2} - 1\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\beta^2 - 1\right)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε: $\boxed{\varepsilon = \beta}$

Αυτή είναι μια ελλειπτική τροχιά επειδή $\varepsilon = \beta < 1$.

2.2

Η αρχική και η τελική τροχιά τέμνονται στο σημείο P, όπου η μηχνή του δορυφόρου τέθηκε σε λειτουργία στιγμιαία (see Figure 4). Στο σημείο αυτό

$$r(\theta=\alpha)=r_0=\frac{r_0}{1-\beta\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha=\frac{\pi}{2}}$$

2.3

Από την εξίσωση της τροχιάς μπορούμε να καταλήξουμε αμέσως στο ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του r προκύπτει για $\theta=0$ και $\theta=\pi$ αντίστοιχα (Εικόνα 4). Έτσι, αυτές δίνονται από τις

$$r_{max}=\frac{l}{1-\varepsilon} \qquad r_{min}=\frac{l}{1+\varepsilon}$$

οπότε

$$\boxed{r_{\max}=\frac{r_0}{1-\beta}} \quad \text{and} \quad \boxed{r_{\min}=\frac{r_0}{1+\beta}}$$

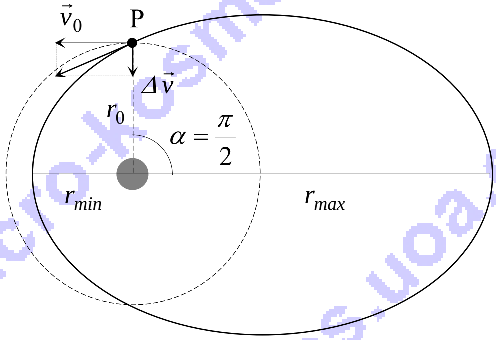

Figure 4

Για $\beta=1/4$, παίρνουμε

$$\boxed{r_{max}=5.63\cdot10^7\text{ m};\quad r_{min}=3.38\cdot10^7\text{ m}}$$

Οι αποστάσεις r_{max} και r_{min} προκύπτουν επίσης από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας και της στροφορμής, λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετες στο απόγειο και στο περίγειο.

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2\left(\beta^2-1\right)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{gR_T^2m}{r}$$

$$L_0=\frac{mgR_T^2}{v_0}=m\,v\,r$$

Αυτό που προκύπτει από αυτές μετά την απαλοιφή του v, είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας οι λύσεις είναι οι r_{max} και r_{min}.

2.4

Από τον Τρίτο νόμο του Kepler, η περίοδος T στην νέα τροχιά θα ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_0^2}{r_0^3}$$

όπου a, ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης, που θα είναι

$$a=\frac{r_{max}+r_{min}}{2}=\frac{r_0}{1-\beta^2}$$

Οπότε

$$\boxed{T=T_0\left(1-\beta^2\right)^{-3/2}}$$

Για $\beta=1/4$ $\qquad \boxed{T=T_0\left(\frac{15}{16}\right)^{-3/2}=26.4\text{ h}}$

3.1

Μόνον εάν ο δορυφόρος ακολουθεί μια ανοικτή τροχιά μπορεί να δραπετεύσει από την βαρυτική έλξη της Γης. Έτσι, η εκκεντρότητα της τροχιάς θα πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από τη μονάδα. Η ελάχιστη παράμετρος προώθησης που αντιστοιχεί σε μια παραβολική τροχιά, με $\varepsilon = 1$

$$\varepsilon = \beta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta_{esc} = 1}$$

Αυτή θα μπορούσε επίσης να προκύψει χρησιμοποιώντας το ότι η συνολική ενέργεια του δορυφόρου θα πρέπει να είναι μηδέν για να φτάσει στο άπειρο ($E_p = 0$) χωρίς κάποια ταχύτητα ($E_k = 0$)

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\beta_{esc}^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \qquad \beta_{esc} = 1$$

Αυτό επίσης προκύπτει από $T = \infty$ ή από $r_{max} = \infty$.

3.2

Λόγω του ότι $\varepsilon = \beta_{esc} = 1$, η πολική εξίσωση παραβολής είναι

$$r = \frac{l}{1 - \cos\theta}$$

Όπου συνεχίζει να ισχύει ότι $l = r_0$. Η ελάχιστη απόσταση Γης-Δορυφόρου αντιστοιχει στην περίπτωση κατά την οποία $\theta = \pi$, έτσι

$$\boxed{r'_{min} = \frac{r_0}{2}}$$

Αυτό επίσης προκύπτει από την διατήρηση της ενέργειας (για $E = 0$) και από την ισότητα μεταξύ της στροφορμής (L_0) στο αρχικό σημείο P και στη μέγιστη προσέγγιση, όπου $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

4.1

Εάν ο δορυφόρος δραπετεύει στο άπειρο με κάποια ταχύτητα v_∞ , από την διατήρηση της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{v_\infty = v_0 \left(\beta^2 - 1\right)^{1/2}}$$

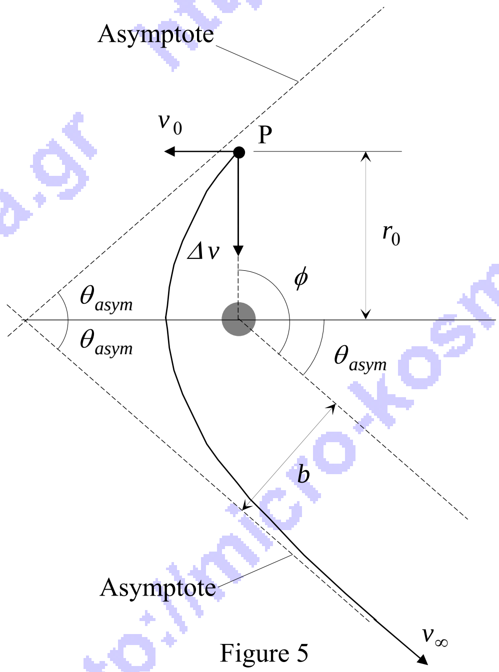

Figure 5

4.2

Εφόσον $\varepsilon = \beta > \beta_{esc} = 1$ η τροχιά του δορυφόρου θα είναι μια υπερβολή.

Η στροφορμή του δορυφόρου είναι η ίδια στο P και στο σημείο όπου αποκτά την v_∞ (Εικόνα 5), έτσι

$$m v_0 r_0 = m v_\infty b$$

So

$$b = r_0 \frac{v_0}{v_\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = r_0 \left(\beta^2 - 1\right)^{-1/2}}$$

4.3

Η γωνία μεταξύ κάθε ασύμπτωτης και του άξονα της υπερβολής που εμφανίζεται στην πολική εξίσωσή της στο όριο που $r \to \infty$. Αυτή είναι η γωνία για την οποία ο παρονομαστής της εξίσωσης εξαφανίζεται

$$1-\beta\cos\theta_{asym}=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{asym}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

Σύμφωνα με την εικόνα 5

$$\phi=\frac{\pi}{2}+\theta_{asym} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi=\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$

Για $\beta=\frac{3}{2}\beta_{esc}=\frac{3}{2}$, παίρνουμε $\boxed{\phi=138^{o}=2.41\,\mathrm{rad}}$

Th 1 ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Ερώτηση	Βασικοί τύποι και ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν	Αναλυτικά αποτελέσματα	Αριθμητικά αποτελέσματα	Οδηγός βαθμολόγησης
1.1	$G\frac{M_T m}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0}$ $v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}$ $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$		$r_0 = 4.22 \cdot 10^7$ m	0.3
1.2		$v_0 = R_T\sqrt{\frac{g}{r_0}}$	$v_0 = 3.07 \cdot 10^3$ m/s	0.3 + 0.1
1.3	$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$	$L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}$ $E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2$		0.4 0.4
2.1	Υπόδειξη για κωνικές τομές.	$l = r_0$ $\varepsilon = \beta$		0.4 0.5
2.2			$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1.0
2.3	Αποτελέσματα από 2.1, ή διατήρηση E και L	$r_{max} = \frac{r_0}{1-\beta}$ $r_{min} = \frac{r_0}{1+\beta}$	$r_{\max} = 5.63 \cdot 10^7$ m $r_{\min} = 3.38 \cdot 10^7$ m	1.0 + 0.2
2.4	Τρίτος νόμος του Kepler	$T = T_0\left(1-\beta^2\right)^{-3/2}$	$T = 26.4$ h	0.5 + 0.2
3.1	$\varepsilon = 1,\ E = 0,\ T = \infty$ or $r_{max} = \infty$		$\beta_{esc} = 1$	0.5
3.2	$\varepsilon = 1$ και αποτελέσματα της 2.1	$r'_{min} = \frac{r_0}{2}$		1.0
4.1	Διατήρηση της E	$v_\infty = v_0\left(\beta^2 - 1\right)^{1/2}$		1.0
4.2	Διατήρηση της L	$b = r_0\left(\beta^2 - 1\right)^{-1/2}$		1.0
4.3	Υπόδειξη για κωνικές τομές.	$\phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)$	$\phi = 138^{\circ} = 2.41$ rad	1.0 + 0.2