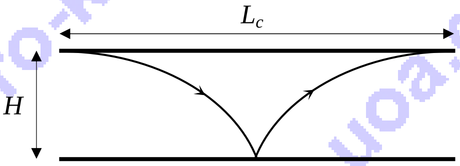
R.S.E.F.

ΘΕΜΑ 3: ΝΕΤΡΟΝΙΑ ΣΕ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

1. Τα νετρόνια που δεν απορροφούνται στο A είναι εκείνα που δεν διασχίζουν το H. Το σημείο αναστροφής της κίνησής τους θα είναι χαμηλότερα από το H. Έτσι, για ένα νετρόνιο που εισέρχεται στην κοιλότητα σε ύψος z με κατακόρυφη ταχύτητα v_z, η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$\frac{1}{2} M v_z^2 + M g z \le M g H \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\sqrt{2g(H-z)} \le v_z(z) \le \sqrt{2g(H-z)}}$$

2. Η κοιλότητα θα έπρεπε να έχει αρκετά μεγάλο μήκος αν θέλαμε να είμαστε σίγουροι ότι θα απορροφηθούν όλα τα νετρόνια με ταχύτητες έξω από την επιτρεπόμενη γκάμα. Οπότε, τα νετρόνια πρέπει να παίρνουν το μέγιστο ύψος τουλάχιστον μια φορά εντός της κοιλότητας. Το μέγιστο απαιτούμενο μήκος που αντιστοιχεί σε νετρόνια που εισέρχονται στο $z = H$ με $v_z = 0$ (εικόνα). Συμβολίζοντας με t_f τον χρόνο πτήσεώς τους



$$\left.\begin{aligned} L_c &= v_x 2 t_f \\ H &= \frac{1}{2} g t_f^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{L_c = 2 v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}} \qquad \boxed{L_c = 6.4 \text{ cm}}$$

3. Ο ρυθμός εισόδου νετρονίων που εισέρχονται στο δεδομένο ύψος z, ανα μονάδα ύψους, είναι ανάλογος με το εύρος των επιτρεπόμενων ταχυτήτων στο ύψος αυτό, ρ είναι η σταθερά αναλογίας

$$\frac{dN_c(z)}{dz} = \rho\left[v_{z,\max}(z) - v_{z,\min}(z)\right] = 2\rho\sqrt{2g(H-z)}$$

Ο συνολικός αριθμός των διερχόμενων νετρονίων προκύπτει από την πρόσθεση των νετρονίων που εισέρχονται σε όλα τα δυνατά ύψη. Καλώντας $y = z/H$

$$N_c(H) = \int_0^H dN_c(z) = \int_0^H 2\rho\sqrt{2g(H-z)}dz = 2\rho\sqrt{2g}\,H^{3/2}\int_0^1 (1-y)^{1/2} dy = 2\rho\sqrt{2g}\,H^{3/2}\left[-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g}\,H^{3/2}}$$

4. Για ένα νετρόνιο που πέφτει από ύψος H, η δράση κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου είναι διπλάσια από την δράση κατά την κάθοδο ή κατά την άνοδο.

$$S = 2\int_0^H p_z dz = 2M\sqrt{2g}\,H^{3/2}\int_0^1 (1-y)^{1/2} dy = \frac{4}{3} M\sqrt{2g}\,H^{3/2}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη κβάντωσης των Bohr-Sommerfeld

$$S = \frac{4}{3} M\sqrt{2g}\,H^{3/2} = n h \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_n = \left(\frac{9h^2}{32 M^2 g}\right)^{1/3} n^{2/3}}$$

Τα αντίστοιχα ενεργειακά επίπεδα (που συνδέονται με την κατακόρυφη κίνηση) είναι

$$E_n = M g H_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \left(\frac{9M g^2 h^2}{32}\right)^{1/3} n^{2/3}}$$

Αριθμητικές τιμές για το πρώτο επίπεδο:

$$H_1 = \left(\frac{9\,h^2}{32\,M^2 g} \right)^{1/3} = 1.65 \times 10^{-5} \text{ m} \qquad \boxed{H_1 = 16.5 \ \mu\text{m}}$$

$$E_1 = M\,g\,H_1 = 2.71 \times 10^{-31} \text{ J} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV} \qquad \boxed{E_1 = 1.69 \text{ peV}}$$

Σημειώστε ότι H_1 είναι της ίδιας τάξεως με το δεδομένο ύψος της κοιλότητας, H = 50 μm. Αυτό δίνειθ τη δυνατότητα για παρατήρηση χωρικής κβάντωσης μεταβάλοντας το H.

5. Σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας ο ελάχιστος χρόνος Δt και η ελάχιστη ενέργεια ΔE ικανοποιούν τη σχέση $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar$. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου, τα νετρόνια κινούνται προς τα δεξιά κατά μια απόσταση

$$\Delta x = v_x \Delta t \geq v_x \frac{\hbar}{\Delta E}$$

Τώρα, η ελάχιστη ενέργεια νετρονίου που επιτρέπεται στην κοιλότητα είναι E_1, έτσι λοιπόν $\Delta E \approx E_1$. Οπότε, μια εκτίμηση του ελάχιστου χρόνου και του ελάχιστου μήκους που απαιτείται είναι

$$\boxed{t_q \approx \frac{\hbar}{E_1} = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0.4 \text{ ms}} \qquad \boxed{L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}}$$

ΘΕΜΑ 3 ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Ερώτηση	Βασικού τύποι που χρησιμοποιήθηκαν	Αναλυτικά αποτελέσματα	Αριθμητικά αποτελέσματα	Οδηγός βαθμολόγησης
1	$\frac{1}{2} M v_z^2 + M g z \le M g H$	$-\sqrt{2g(H-z)} \le v_z(z) \le \sqrt{2g(H-z)}$		1.5
2	$L_c = v_x 2t_f$ $H = \frac{1}{2} g t_f^2$	$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}$	$L_c = 6.4$ cm	1.3 + 0.2
3	$\frac{dN_c}{dz} = \rho \left[v_{z,\max} - v_{z,\min} \right]$ $N_c(H) = \int_0^H dN_c(z)$	$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g}\, H^{3/2}$		2.5
4	$S = 2\int_0^H p_z dz = nh$	$H_n = \left(\frac{9h^2}{32 M^2 g} \right)^{1/3} n^{2/3}$ $E_n = \left(\frac{9M g^2 h^2}{32} \right)^{1/3} n^{2/3}$	$H_1 = 16.5$ μm $E_1 = 1.69$ peV	1.6 + 0.2 0.5 + 0.2
5	$\Delta E\, \Delta t \ge \hbar$ $\Delta E \approx E_1$ $\Delta x = v_x \Delta t$	$t_q \approx \frac{\hbar}{E_1}$ $L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1}$	$t_q \approx 0.4$ ms $L_q \approx 4$ mm	1.3 + 0.2 0.3 + 0.2