The 38th International Physics Olympiad
Iran
Theory Competition
Sunday, 15 July 2007

1. Αυτός ο φάκελος περιέχει 3 **φύλλα Ερωτήσεων (Q)** , 3 **φύλλα Απαντήσεων (A)** και έναν αριθμό **φύλλων Γραψίματος (W)**

2. Αυτή η ερώτηση είναι η **μπλε (blue)**, γι' αυτό παρακαλούμε γράψτε την απάντηση σε πορτοκαλί φύλλα και μετά βάλτε τα πορτοκαλί φύλλα σε αυτό το φάκελο *με κατάλληλη σειρά.* Βάλτε τα **φύλλα Απαντήσεων (A)** στη δεξιά θήκη πρώτα, μετά τα **φύλλα Γραψίματος (W)** τα οποία έχετε χρησιμοποιήσει για να απαντήσετε στην ερώτηση με τη σειρά, ακολουθούμενα από τα **φύλλα Γραψίματος (W)** τα οποία δεν επιθυμείτε να βαθμολογηθούν. Βάλτε τα αχρησιμοποίητα φύλλα και τα τυπωμένα **φύλλα Ερωτήσεων (Q)** στην αριστερή θήκη. Στο τέλος βάλτε και τους τρεις φακέλους στο μεγάλο φάκελο.

Στη φυσική, όποτε έχουμε μια σχέση ισότητας, και τα δύο μέρη της εξίσωσης θα πρέπει να είναι του ίδιου τύπου δηλαδή πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Για παράδειγμα δεν μπορείτε να έχετε μια κατάσταση όπου η ποσότητα στο δεξιό-μέρος της εξίσωσης παριστά κάποιο μήκος και η ποσότητα στο αριστερό μέλος να παριστά ένα χρονικό διάστημα. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μερικές φορές κάποιος μπορεί σχεδόν να συμπεραίνει τη μορφή μιας σχέσης που συνδέει φυσικά μεγέθη χωρίς να λύσει το πρόβλημα αναλυτικά.

Για παράδειγμα αν μας ζητηθεί να βρούμε το χρόνο που χρειάζεται ένα σώμα για να πέσει από κάποιο ύψος h με την επίδραση μιας σταθερής επιτάχυνσης λόγω της βαρύτητας g, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κάποιος θα χρειαζόταν μόνο να κατασκευάσει μια ποσότητα που παριστά χρόνο, χρησιμοποιώντας τις ποσότητες g και h με τον μοναδικό πιθανό τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να το κάνει αυτό δηλαδή $T = a(h/g)^{1/2}$. Σημειώστε ότι αυτή η λύση θα πρέπει να συμπεριλάβει έναν ακόμα ακαθόριστο συντελεστή α ο οποίος είναι *αδιάστατος* και έτσι δεν μπορεί να καθοριστεί, με τη χρήση αυτής της μεθόδου. Αυτός ο συντελεστής μπορεί να είναι ένας αριθμός όπως το 1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π, ή κάποιος άλλος πραγματικός αριθμός. Αυτή η μέθοδος εύρεσης φυσικών σχέσεων καλείται *διαστατική ανάλυση*. Στη διαστατική ανάλυση οι αδιάστατοι συντελεστές δεν είναι σημαντικοί και δεν είναι αναγκαίο να τους γράφουμε. Ευτυχώς στα περισσότερα προβλήματα αυτοί οι συντελεστές είναι της τάξεως του 1 και η απαλοιφή τους δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους των φυσικών ποσοτήτων. Έτσι, εφαρμόζοντας τη διαστατική ανάλυση στο παραπάνω πρόβλημα, παίρνουμε $T = (h/g)^{1/2}$.

Γενικά, οι διαστάσεις ενός φυσικού μεγέθους είναι γραμμένες σε όρους των διαστάσεων των θεμελιωδών μεγεθών: M (μάζα), L (μήκος), T (χρόνος), και K (θερμοκρασία). Οι διαστάσεις κάποιου φυσικού μεγέθους, x συμβολίζονται με $[x]$. Ως παράδειγμα, για να εκφράσουμε τις διαστάσεις της ταχύτητας v, της κινητικής ενέργειας E_k, και της θερμοχωρητικότητας C_V γράφουμε: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1 Θεμελιώδεις Σταθερές και Διαστατική Ανάλυση

1.1	Να βρείτε τις διαστάσεις *των θεμελιωδών σταθερών*, όπως η σταθερά του Planck h, η ταχύτητα του φωτός, c, η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G, και η σταθερά του Boltzmann, k_B, σε σχέση με τις διαστάσεις του μήκους, της μάζας, του χρόνου και της θερμοκρασίας.	0.8

Σύμφωνα με τον νόμο των Stefan-Boltzmann η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει το μέλαν σώμα (δηλαδή η συνολική ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου) είναι ίση με $\sigma\theta^4$, όπου σ η σταθερά Stefan-Boltzmann και θ είναι η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

1.2	Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις της σταθεράς Stefan-Boltzmann σε σχέση με τις διαστάσεις του μήκους, της μάζας, του χρόνου και της θερμοκρασίας.	0.5

Η σταθερά Stefan-Boltzmann δεν είναι θεμελιώδης σταθερά και κάποιος θα μπορούσε να τη γράψει σε σχέση με θεμελιώδεις σταθερές ως $\sigma = a\,h^{\alpha}c^{\beta}G^{\gamma}k_B{}^{\delta}$.

Στη σχέση αυτή a είναι μια αδιάστατη παράμετρος τάξεως 1. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η ακριβής τιμή της a δεν είναι σημαντική από την δική μας οπτική γωνιά, έτσι μπορούμε να τη θέσουμε ίση με 1.

1.3	Να υπολογίσετε τα α, β, γ και δ χρησιμοποιώντας τη διαστατική ανάλυση.	1.0

2 Η Φυσική των Μαύρων Οπών

Σε αυτό το μέρος του προβλήματος, θέλουμε να βρούμε μερικές ιδιότητες των μαύρων οπών χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Σύμφωνα με ένα θεώρημα της φυσικής γνωστό ως *no hair theorem*, όλα τα χαρακτηριστικά της μαύρης οπής τα οποία αναφέρονται στο πρόβλημα αυτό εξαρτώνται μόνο από τη μάζα της μαύρης οπής. Ένα χαρακτηριστικό μιας μαύρης οπής είναι το εμβαδόν του *ορίζοντα γεγονότων*. Σε γενικές γραμμές, ο ορίζοντας των γεγονότων είναι το σύνορο της μαύρης οπής. Μέσα από το σύνορο αυτό, η βαρύτητα είναι τόσο ισχυρή ώστε ακόμα και το φως δεν μπορεί να δραπετεύσει από την περιοχή η οποία περικλείεται από το σύνορο.

Θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ της μάζας της μαύρης οπής, m, και του εμβαδού του ορίζοντα των γεγονότων, A. Αυτό το εμβαδόν εξαρτάται από τη μάζα της μαύρης οπής, την ταχύτητα του φωτός, και την σταθερά της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης. Όπως στην 1.3. γράφουμε $A = G^{\alpha} c^{\beta} m^{\gamma}$.

2.1	Χρησιμοποιήστε τη διαστατική ανάλυση για να υπολογίσετε τα α, β και γ.	0.8

Από το αποτέλεσμα της 2.1 προκύπτει εύκολα ότι το εμβαδόν του ορίζοντα των γεγονότων μιας μαύρης οπής αυξάνεται με την μάζα της. Από μια κλασική οπτική γωνιά, τίποτα δεν διαφεύγει από μια μαύρη οπή και έτσι σε όλες τις φυσικές διαδικασίες το εμβαδόν του ορίζοντα των γεγονότων μπορεί μόνο να αυξάνεται. Κατ' αναλογία με τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, ο Bekenstein πρότεινε να οριστεί η εντροπία, S ,μιας μαύρης οπής, ως ανάλογη με το εμβαδόν του ορίζοντα των γεγονότων δηλαδή $S = \eta A$.Αυτή η εικασία έχει καταστεί περισσότερο πειστική έναντι άλλων προτάσεων.

2.2	Χρησιμοποιήστε τον θερμοδυναμικό ορισμό της εντροπίας $dS = dQ/\theta$ για να βρείτε τις διαστάσεις της εντροπίας. dQ είναι η θερμότητα που ανταλλάσσεται και θ είναι η απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος.	0.2

2.3	Όπως στην 1.3, εκφράστε την μη αδιάστατη σταθερά η ως συνάρτηση των θεμελιωδών σταθερών h, c, G, και k_B.	1.1

*Να **μην** χρησιμοποιήσετε διαστατική ανάλυση για το υπόλοιπο μέρος του προβλήματος. Μπορείτε όμως να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του προηγούμενου μέρους που βρήκατε.*

3 Ακτινοβολία Hawking

Σε μια προσέγγιση ημι-κβαντικής μηχανικής, Ο Hawking θεωρεί ότι, σε αντίθεση με την κλασσική άποψη, οι μαύρες οπές εκπέμπουν ακτινοβολία παρόμοια με την ακτινοβολία του μέλανος σώματος σε θερμοκρασία γνωστή ως *θερμοκρασία Hawking*

3.1	Χρησιμοποιήστε τη σχέση $E = mc^2$, η οποία δίνει την ενέργεια μιας μαύρης οπής σε σχέση με τη μάζα της, και τους νόμους της θερμοδυναμικής για να εκφράσετε τη θερμοκρασία Hawking θ_H μιας μαύρης οπής σε σχέση με τη μάζα της και θεμελιώδεις σταθερές. Υποθέστε ότι η μαύρη οπή δεν ενεργεί ως τέτοια στον ορίζοντά της.	0.8

3.2	Η μάζα μιας απομονωμένης μαύρης οπής θα αλλάζει λόγω της ακτινοβολίας Hawking. Να χρησιμοποιήσετε το νόμο Stefan-Boltzmann για να βρείτε την εξάρτηση του ρυθμού μεταβολής της μάζας της μαύρης οπής στη θερμοκρασία Hawking, θ_H και να την εκφράσετε σε σχέση με τη μάζα της μαύρης οπής και με θεμελιώδεις σταθερές.	0.7

3.3	Να εκφράσετε το χρόνο t^* , που απαιτείται για μια απομονωμένη μαύρη οπή μάζας m για να «εξατμιστεί» εντελώς, δηλαδή να χάσει όλη την μάζα της.	1.1

Από την σκοπιά της θερμοδυναμικής. Οι μαύρες οπές παρουσιάζουν κάποιες παραδοξότητες. Για παράδειγμα η θερμοχωρητικότητα μιας οπής είναι αρνητική.

3.4	Να εξαγάγετε μια σχέση για τη θερμοχωρητικότητας μιας μαύρης οπής μάζας m .	0.6

4 Μαύρες οπές και η Κοσμική Ραδιενέργεια Υποβάθρου

Θεωρείστε μια μαύρη οπή που υπόκειται σε εκπομπή κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου. Η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος με θερμοκρασία θ_B η οποία είναι η ίδια σε όλο το σύμπαν. Ένα σώμα με ολική επιφάνεια A θα δέχεται τότε ενέργεια ίση $\sigma\theta_B^4 \times A$ ανά μονάδα χρόνου. Μια μαύρη οπή, άρα, χάνει ενέργεια λόγω της ακτινοβολίας Hawking και κερδίζει ενέργεια από την κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου.

4.1	Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της μάζας μιας μαύρης οπής, σε σχέση με τη μάζα της μαύρης οπής, τη θερμοκρασία της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου, και θεμελιώδεις σταθερές.	0.8

4.2	Σε συγκεκριμένη μάζα, m^*, αυτός ο ρυθμός μεταβολής θα εκμηδενιστεί. Να εκφράσετε τη μάζα m^* σε σχέση με τη θ_B και θεμελιώδεις σταθερές.	0.4

4.3	Να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος 4.2 για να αντικαταστήσετε τη θ_B στην απάντηση του ερωτήματος 4.1 και να εκφράστε το ρυθμό μεταβολής της μάζας μιας μαύρης οπής σε σχέση με m, m^*, και θεμελιώδεις σταθερές.	0.2

4.4	Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία Hawking μιας μαύρης οπής σε θερμική ισορροπία με κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου.	0.4

4.5	Είναι η θερμική ισορροπία ευσταθής ή ασταθής; Εξηγήστε. (Εκφράστε την απάντησή με τη βοήθεια μαθηματικής σχέσης).	0.6

Part 1

Section	Answer	Mark
1.1	$[h] =$ $[c] =$ $[G] =$ $[k_B] =$	0.8
1.2	$[\sigma] =$	0.5
1.3	$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$ $\delta =$	1.0

Part 2

Section	Answer	Mark
2.1	$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$	0.8
2.2	$[S] =$	0.2
2.3	$\eta =$	1.1

Part 3

Section	Answer	Mark
3.1	$\theta_H =$	0.8
3.2	$\frac{dm}{dt} =$	0.7
3.3	$t^* =$	1.1
3.4	$C_V =$	0.6

Part 4

Section	Answer	Mark
4.1	$\frac{dm}{dt} =$	0.8
4.2	$m^* =$	0.4
4.3	$\frac{dm}{dt} =$	0.2
4.4	$\theta_H =$	0.4
4.5	Ευσταθής ☐ Ασταθής ☐	0.6