Λύση

1.1 Υπολογισμός της απόστασης TG

Ο όγκος του νερού στην κοιλότητα είναι $V = 1000\,\text{cm}^3 = 10^{-3}\,\text{m}^3$. Το μήκος του πυθμένα της κοιλότητας είναι

$d = L - a\tan 60^0 = (.74 - .12\tan 60^0)\,\text{m} = 0.5322\,\text{m}$.

(καθώς τα δεδομένα είναι με δύο σημαντικά ψηφία, θα κρατήσουμε μόνο δύο σημαντικά ψηφία στην τελική απάντηση, αλλά κρατάμε περισσότερα στα ενδιάμεσα βήματα).

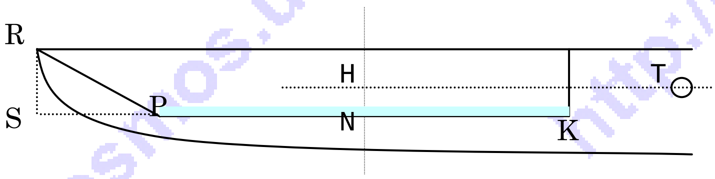
Το ύψος c του στρώματος νερού στην κοιλότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V = bcd + b\frac{c}{2}c\tan 60^0 \Rightarrow c = \frac{(d^2 + 2\sqrt{3}V/b)^{1/2} - d}{\sqrt{3}}$$

Εισάγοντας αριθμητικές τιμές για τα V, b και d, βρίσκουμε $c = 0.01228\,\text{m}$.

Όταν ο μοχλός είναι οριζόντιος, η απόσταση (στον οριζόντιο άξονα) μεταξύ του άξονα περιστροφής και του κέντρου μάζας του νερούr N είναι

$\text{TN} = a + \frac{d}{2} + \frac{c}{4}\tan 60^0 = 0.4714\,\text{m}$, και $\text{TG} = (m/M)\text{TN} = 0.01571\,\text{m}$.



Απάντηση: $\text{TG} = 0.016\,\text{m}$.

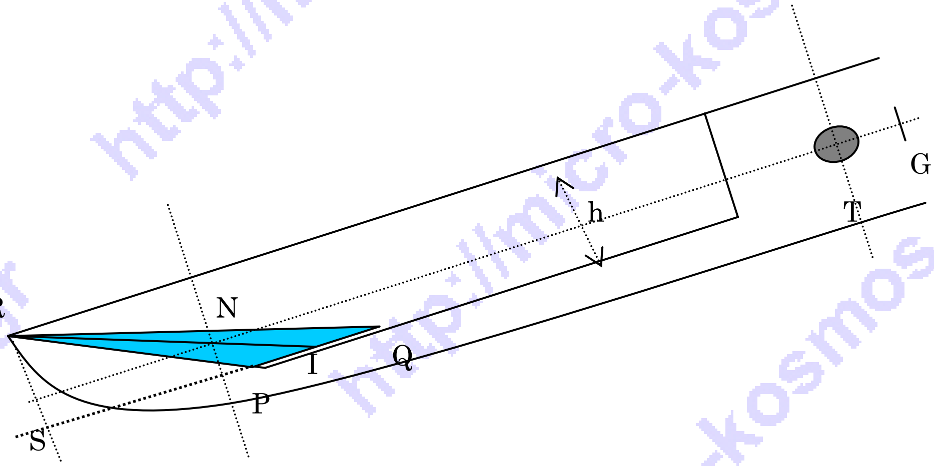
1.2. Υπολογισμός των τιμών α_1 και α_2.

Όταν ο μοχλός γέρνει κατά γωνία α_1, το επίπεδο του νερού είναι στο χείλος της κοιλότητας. Στο σημείο αυτό ό όγκος του νερού είναι $10^{-3}\,\text{m}^3$. Υποθέτουμε ότι $\text{PQ} < d$. Από τη Γεωμετρία $V = hb \times \text{PQ}/2$, από την οποία $\text{PQ} = 0.1111\,\text{m}$. Η υπόθεση $\text{PQ} < d$ προφανώς ικανοποιείται ($d = 0.5322\,\text{m}$).

Για τον υπολογισμό της α_1, $\tan\alpha_1 = h/\text{QS}{=}h/(\text{PQ}{+}\sqrt{3}h)$. Από την οποία

$\alpha_1 = 20.6^0$.

Όταν η γωνία κλίσης είναι 30^0, η κοιλότητα είναι άδεια: $\alpha_2 = 30^0$.



1.3. Καθορισμός της γωνίας κλίσης β του μοχλού και της ποσότητας του νερού m στην κοιλότητα όταν η συνολική ροπή μ στο μοχλό είναι μηδέν

Συμβολίζουμε $\mathrm{PQ} = x(\mathrm{m})$. Η ποσότητα του νερού στην κοιλότητα είναι

$$m = \rho_{\mathrm{water}} \frac{xhb}{2} = 9x(\mathrm{kg}).$$

$\mu = 0$ όταν η ροπή από το βάρος του νερού στην κοιλότητα αναιρεί τη ροπή από το βάρος του μοχλού. Η τομή του νερού στην κοιλότητα είναι το τρίγωνο PQRστην εικόνα. Το κέντρο μάζας N του νερού βρίσκεται στα 2/3 της διαμέσου RI, συνεπώς NTG είναι ευθεία. Έτσι: $mg \times \mathrm{TN} = Mg \times \mathrm{TG}$ ή

$$m \times \mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG} = 30 \times 0.1571 = 0.4714 \quad (1).$$

Υπολογίζοντας TN από x και αντικαθιστώντας την (1) :

$$\mathrm{TN} = L + a - \frac{2}{3}(h\sqrt{3} + \frac{x}{2}) = 0.94 - 0.08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0.8014 - \frac{x}{3}$$

προκύπτει $\quad m \times \mathrm{TN} = 9x(0.8014 - x/3) = -3x^2 + 7.213x \qquad (2)$

Έτσι βρίσκουμε μια εξίσωση για το $x: -3x^2 + 7.213x = 0.4714 \qquad (3)$

Οι λύσεις για την (3) είναι $x = 2.337$ και $x = 0.06723$. Όπου x πρέπει να είναι μικρότερο από 0.5322, πρέπει να πάρουμε $x = x_0 = 0.06723$ και

$m = 9x_0 = 0.6051\text{kg}$.

$\tan\beta = \dfrac{h}{x + h\sqrt{3}} = 0.4362$, ή $\beta = 23.57^0$.

Απάντηση: $m = 0.61\text{kg}$ and $\beta = 23.6^0$.

Ερώτηση 2

2.1.**Γραφήματα $\mu(\alpha)$, $\alpha(t)$, και $\mu(t)$ κατά τη διάρκεια του κύκλου λειτουργίας.**

Αρχικά όταν δεν υπάρχει νερό στην κοιλότητα, $\alpha = 0$, η ροπή μ έχει τη μέγιστη τιμή της $gM \times \text{TG} = 30 \times 9.81 \times 0.01571 = 4.624\,\text{N}\cdot\text{m}$. Η σύμβασή μας είναι ότι το πρόσημο της ροπής είναι αρνητικό όταν τείνει να μειώσει την α.

Καθώς το νερό πέφτει μέσα στην κοιλότητα, η ροπή από το βάρος του νερού (με αρνητικό πρόσημο) κάνει την μ να αυξάνεται έως μ να γίνεται θετική, όταν ο μοχλός αρχίζει να ανεβαίνει. Από αυτή τη στιγμή, θεωρούμε, την ποσότητα του νερού στην κοιλότητα σταθερή.

Ο μοχλός γέρνει ώστε το κέντρο μάζας του νερού απομακρύνεται από τον άξονα περιστροφής, πράγμα που αυξάνει την μ, η οποία μεγιστοποιείται όταν το νερό είναι έτοιμο να χυθεί από την κοιλότητα. Τη στιγμή αυτή $\alpha = \alpha_1 = 20.6^0$.

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$\text{SI} = \text{SP} + \text{PQ}/2 = 0.12 \times 1.732 + 0.1111/2 = 0.2634\,\text{m}$.

$\text{TN} = 0.20 + 0.74 - \dfrac{2}{3}\text{SI} = 0.7644\,\text{m}$.

$$\mu_{\max} = (1.0 \times \text{TN} - 30 \times \text{TG})g\cos 20.6^0$$

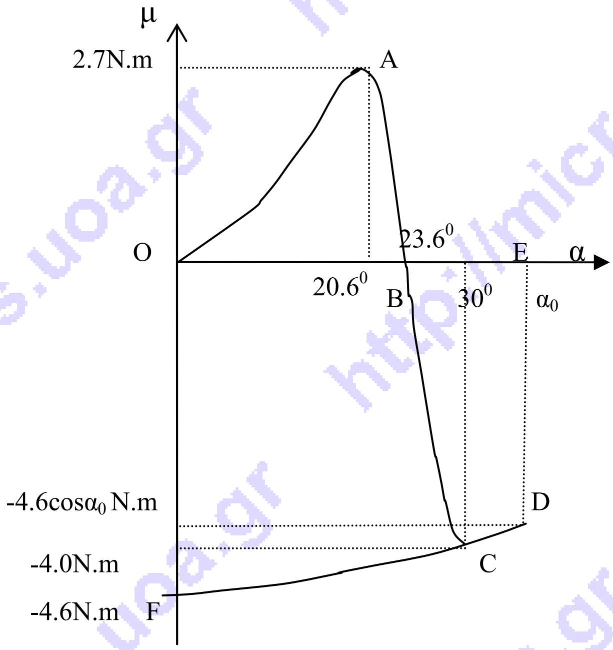
$$= (1.0 \times 0.7644 - 30 \times 0.01571) \times 9.81 \times \cos 20.6^0 = 2.690\,\text{N}\cdot\text{m}.$$

Συνεπώς $\mu_{\max} = 2.7\,\text{N}\cdot\text{m}$.

Καθώς η κοιλότητα γέρνει περισσότερο, Η ποσότητα του νερού μέσα της μειώνεται, και όταν $\alpha = \beta$, $\mu = 0$. Λόγω αδράνειας, η α αυξάνεται και ή μ συνεχίζει να μειώνεται. Η κοιλότητα είναι άδεια όταν $\alpha = 30^0$, και η μ είναι ίση με

$-30\times g\times \mathrm{TG}\times \cos 30^0 = -4.0\,\mathrm{N\cdot m}$. Μετά από αυτό η α συνεχίζει να αυξάνεται λόγω αδράνειας σε α_0 ($\mu = -gM\,\mathrm{TG}\cos\alpha_0 = -4.62\cos\alpha_0\,\mathrm{N\cdot m}$), τότε γρήγορα μειώνεται στην τιμή to 0 ($\mu = -4.62\,\mathrm{N\cdot m}$).

Στη βάση αυτή μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα των $\alpha(t)$, $\mu(t)$, και $\mu(\alpha)$ όπως παρακάτω



2.2. Το στοιχειώδες έργο που παράγεται από τη ροπή $\mu(\alpha)$ είναι $dw = \mu(\alpha)d\alpha$. Η ενέργεια που μεταβιβάζεται από τον μοχλό κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λόγω της δράσης της $\mu(\alpha)$ είναι $w = \oint \mu(\alpha)d\alpha$, το οποίο είναι το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραμμή $\mu(\alpha)$ και τον άξονα α. Συνεπώς W_{total} ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη (OABCDFO) στο γράφημα $\mu(\alpha)$.

Το έργο που μεταβιβάζει ο μοχλός στο γουδί είναι η ενέργεια που παίρνει ο μοχλός καθώς κινείται από τη θέση $\alpha = \alpha_0$ στην οριζόντια θέση $\alpha = 0$. Έχουμε W_{pounding} που ισούται με το εμβαδόν (OEDFO) στο γράφημα $\mu(\alpha)$. Είναι ίση με $gM \times \mathrm{TG} \times \sin\alpha_0 = 4.6\sin\alpha_0$ Joule.

2.3. Οι τιμές του α_0 μπορεί να εκτιμηθούν από το γεγονός ότι στο σημείο D η ενέργεια του μοχλού είναι μηδέν. Έχουμε

εμβαδόν (OABO) = εμβαδόν (BEDCB)

Προσεγγίζοντας το OABO με ένα τρίγωνο, και το BEDCB με ένα τραπέζιο, παίρνουμε:

$23.6 \times 2.7 \times (1/2) = 4.0 \times [(\alpha_0 - 23.6) + (\alpha_0 - 30)] \times (1/2)$, από το οποίο προκύπτει ότι

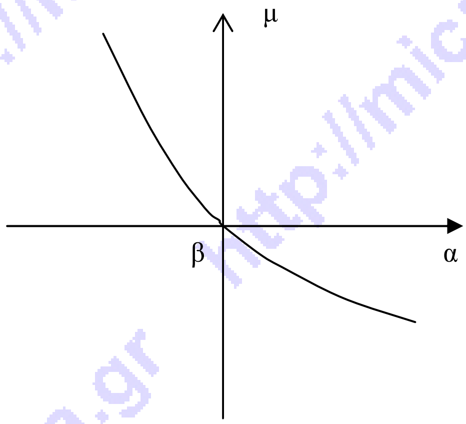
$\alpha_0 = 34.7^0$. Οπότε βρίσκουμε W_{pounding} = εμβαδόν (OEDFO) =

$$\int_{34.76}^{0} -Mg \times \mathrm{TG} \times \cos\alpha \, d\alpha \; = 4.62 \times \sin 34.7^0 = 2.63$$

Έτσι βρίσκουμε $W_{\text{pounding}} \approx 2.6$ Joule.

Μέρος 3.

3.1a. Η κοιλότητα είναι συνεχώς γεμάτη με νερό.
Το γράφημα δείχνει ότι για $\alpha = \beta$ έχουμε ευσταθή ισορροπία του γουδιού.



3.1.b. Εύρεση της έκφρασης για τη ροπή μ όταν η γωνία κλίσης είναι $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ μικρό).

Η μάζα του νερού στην κοιλότητα όταν ο μοχλός γέρνει κατά μια γωνία α είναι

$m = (1/2)\rho b h \mathrm{PQ}$,

όπου $\mathrm{PQ} = h\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan 30^0}\right)$. Α΄Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι όταν η α αυξάνεται από β σε $\beta + \Delta\alpha$, η μάζα του νερού αυξάνεται κατά

$\Delta m = -\dfrac{bh^2\rho}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\dfrac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha$. Η ροπή μ που δρα στον μοχλό όταν η κλίση είναι $\beta+\Delta\alpha$ είναι ίση με τη ροπή λόγω της Δm.

Έχουμε $\mu = \Delta m \times g \times \mathrm{TN} \times \cos(\beta+\Delta\alpha)$. TN βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας του μοχλού στη γωνία κλίσης β:

$\mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG}/m = 30 \times 0.01571/0.605 = 0.779\,\mathrm{m}$.

Βρίσκουμε στο τέλος $\mu = -47.2\Delta\alpha\,\mathrm{N\cdot m} \approx -47.\Delta\alpha\,\mathrm{N\cdot m}$.

3.1.c. Εξίσωση κίνησης του μοχλού:

$\mu = I\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ όπου $\mu = -47.\Delta\alpha$, $\alpha = \beta+\Delta\alpha$, και I το άθροισμα των ροπών αδράνειας του μοχλού και του νερού στην κοιλότητα ως προς τον άξονα T. Εδώ η I δεν είναι σταθερή αφού η ποσότητα του νερού εξαρτάται από την α. Όταν $\Delta\alpha$ είναι μικρή, μπορεί κανείς να θεωρήσει την ποσότητα και το σχήμα του νερού στην κοιλότητα ως σταθερά, έτσι η I είναι κατά προσέγγιση σταθερά. Θεωρούμε το νερό στην κοιλότητα ως υλικό σημείο με μάζα 0.6 kg, ένας απλός υπολογισμός δίνει

$I = 12 + 0.6\times 0.78^2 = 12.36 \approx 12.4\,\mathrm{kg\,m^2}$. Έχουμε $-47\Delta\alpha = 12.4\dfrac{d^2\Delta\alpha}{dt^2}$. Αυτή είναι η εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με περίοδο $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{12.4}{47}} = 3.227$. Η απάντηση συνεπώς είναι $\tau = 3.2\,\mathrm{s}$.

3.2 . **Αρμονική ταλάντωση μοχλού (γύρω από $\alpha=\beta$) όταν η κοιλότητα είναι συνεχώς γεμάτη**

Υποθέτουμε ότι η μοχλός εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος $\Delta\alpha_0$ στην περιοχή γύρω από $\alpha=\beta$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, $\Delta\alpha=0$, η κοιλότητα είναι γεμάτη (ξεχειλισμένη από νερό). Τη χρονική στιγμή dt η κλίση μεταβάλλεται κατά $d\alpha$. Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που $d\alpha<0$, π.χ., η κίνηση του μοχλού είναι κατά την κατεύθυνση μείωσης της α, και απαιτείται προσθήκη νερού για να ξεχειλίσει από την κοιλότητα. Η εξίσωση της κίνησης είναι:

$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0\sin(2\pi t/\tau)$, συνεπώς $d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0(2\pi/\tau)\cos(2\pi t/\tau)dt$.

Για να ξεχειλίσει το νερό από την κοιλότητα, κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού θα πρέπει τουλάχιστον να πέσει στην κοιλότητα ποσότητα νερού

$$dm = -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}d\alpha = \frac{2\Delta\alpha_0\pi bh^2\rho dt}{2\tau\sin^2\beta}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \;;$$

dm η μέγιστη την $t=0$, $\quad dm_0 = \dfrac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}dt$

Η ποσότητα του νερού που πέφτει στην κοιλότητα εξαρτάται από το ρυθμό Φ; $dm_0 = \Phi dt$,

συνεπώς
$$\Phi = \frac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}$$

Το να είναι γεμάτη η κοιλότητα είναι αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ο μοχλός αρμονική ταλάντωση, συνεπώς η συνθήκη για να εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος 1^0 ή $2\pi/360$ rad είναι $\Phi \geq \Phi_1$ με

$$\Phi_1 = \frac{\pi bh^2\rho 2\pi}{360\tau\sin^2\beta} = 0.2309\,\text{kg/s} \qquad \text{Έτσι} \quad \Phi_1 = 0.23\,\text{kg/s}.$$

3.3 Καθορισμός του Φ_2

Εάν η κοιλότητα παραμένει γεμάτη όταν η κλίση μειώνεται στις 20.6^0, τότε η ποσότητα του νερού στην κοιλότητα θα αυξανόταν κατά 1 kg στο χρόνο αυτό, και ο μοχλός θα ταλαντωνόταν αρμονικά με πλάτος $23.6^0 - 20.6^0 = 3^0$. Ο ρυθμός πτώσης του νερού θα έπρεπε να υπερβαίνει το $3\Phi_1$, συνεπώς

$$\Phi_2 = 3\times 0.23 \approx 0.7\,\text{kg/s}.$$

Αυτός είναι ο ελάχιστος ρυθμός ώστε η διάταξη-γουδί για το άλεσμα του ρυζιού να μην λειτουργεί.