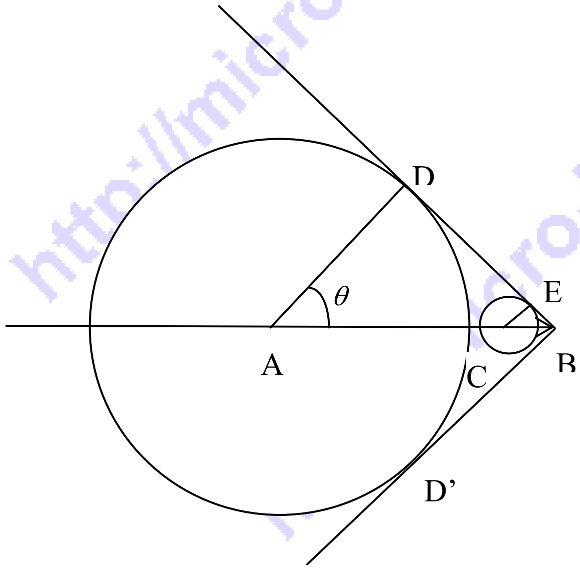
Λύση

1.



Εικόνα 1

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο το οποίο εμπεριέχει την τροχιά του σωματιδίου. Τη χρονική στιγμή $t=0$, η θέση του σωματιδίου είναι στο σημείο A. Φτάνει στο σημείο B τη χρονική στιγμή $t=t_1$. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, από $0<t<t_1$, η ακτινοβολία που εκπέμπεται από το A φτάνει σε κύκλο με ακτίνα AD και εκείνη που εκπέμπεται από το C φτάνει σε κύκλο ακτίνας CE. Οι ακτίνες των σφαιρών είναι ανάλογες με την απόσταση από το B:

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}=\frac{c(t_1-t)/n}{v(t_1-t)}=\frac{1}{\beta n}=\text{const}$$

Οι σφαίρες συνεπώς μετασχηματίζονται η μια στην άλλη με ομοθεσία της κορυφής B και της περιβάλλουσάς τους η οποία είναι κώνος με κορυφή B και γωνία ημίσεως ανοίγματος $\varphi=\mathbf{Arcsin}\frac{1}{\beta n}=\frac{\pi}{2}-\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη φωτεινή ακτίνα CE με την τροχιά του σωματιδίου.

1.1. Η διασταύρωση των κυμάτων με το επίπεδο είναι δύο ευθείες γραμμές, BD και BD'.

1.2. Αυτές σχηματίζουν μια γωνία $\varphi = \textbf{Arcsin}\dfrac{1}{\beta n}$ με την τροχιά του σωματιδίου.

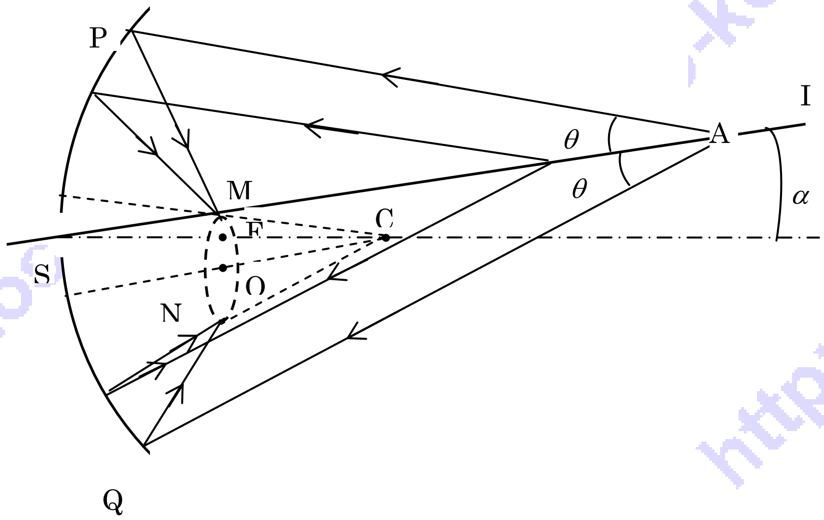
2. Υιοθετούμε τους συμβολισμούς:

S – το σημείο στο οποίο η δέσμη συναντά τον σφαιρικό καθρέπτη

F – η εστία του σφαιρικού καθρέπτη

C – το κέντρο του σφαιρικού καθρέπτη

IS – η ευθύγραμμη τροχιά του φορτισμένου σωματιδίου που σχηματίζει μια μικρή γωνία α με τον οπτικό άξονα του καθρέπτη.



Εικόνα 2

CF = FS = f

CO//IS

CM//AP

CN//AQ

$\widehat{FCO} = \alpha \Rightarrow FO = f \times \alpha$

$\widehat{MCO} = \widehat{OCN} = \theta \Rightarrow MO = f \times \theta$

Σχεδιάζουμε μια ευθεία γραμμή παράλληλη στην IS η οποία περνά από το κέντρο C. Η γραμμή τέμνει το εστιακό επίπεδο στο O. Έχουμε FO $\approx f\,\alpha$.

Αρχίζοντας από το C, σχεδιάζουμε δύο γραμμές σε αμφότερες τις πλευρές της CO η οποίες σχηματίζουν μ' αυτήν γωνία θ. Αυτές οι δύο γραμμές τέμνουν το εστιακό επίπεδο στα M και N, αντίστοιχα. Όλες οι ακτίνες της ακτινοβολίας Cherenkov στο επίπεδο του σχήματος, μετά την ανάκλασή τους στον καθρέπτη, τέμνονται στα M ή N.

Στην τρισδιάστατη περίπτωση, η ακτινοβολία Cherenkov δίνει ένα δακτύλιο στο εστιακό επίπεδο με κέντρο στο O (FO $\approx f \times \alpha$) και με ακτίνα MO $\approx f \times \theta$.

Στην κατασκευή, όλες οι γραμμές είναι στο επίπεδο του σχεδίου. Ο δακτύλιος φαίνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή.

3.

3.1. Για το φαινόμενο Cherenkov effect πρέπει $n > \frac{c}{v}$, δηλαδή $n_{\min} = \frac{c}{v}$.

Θέτοντας $\zeta = n - 1 = 2{,}7 \times 10^{-4} P$, έχουμε

$$\zeta_{\min} = 2{,}7 \times 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{v} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1$$.

(1)

Επειδή

$$\frac{Mc^2}{pc} = \frac{Mc}{p} = \frac{Mc}{\dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = K \qquad (2)$$

τότε K = 0,094 ; 0,05 ; 0,014 για πρωτόνιο, καόνιο και πιόνιο, αντίστοιχα.

Από τη (2) μπορούμε να εκφράσουμε το β με τη βοήθεια του K ως

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \qquad (3)$$

Όπου $K^2 << 1$ και για τα τρία είδη σωματιδίων μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους τάξεως μεγαλύτερης του 2 στο K . Έχουμε

$$1 - \beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2}K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \qquad (3a)$$

$$\frac{1}{\beta}-1=\sqrt{1+K^2}-1\approx\frac{1}{2}K^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \qquad (3b)$$.

Θέτοντας την (3b) στην (1), παίρνουμε

$$P_{\mathbf{min}}=\frac{1}{2,7.10^{-4}}\cdot\frac{1}{2}K^2 \qquad (4)$$.

Παίρνουμε τις παρακάτω αριθμητικές τιμές για την ελάχιστη πίεση

$P_{\min}$ = 16 atm για πρωτόνια,

$P_{\min}$ = 4.6 atm για καόνια,

$P_{\min}$ = 0.36 atm για πιόνια.

3.2. Για $\theta_\pi=2\theta_k$ έχουμε

$$\cos\theta_\pi=\cos 2\theta_k=2\cos^2\theta_k-1 \qquad (5)$$

Υποδηλώνουμε

$$\varepsilon=1-\beta=1-\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}\approx\frac{1}{2}K^2 \qquad (6)$$

Από την (5) παίρνουμε

$$\frac{1}{\beta_\pi n}=\frac{2}{\beta_\kappa^2 n^2}-1 \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας $\beta=1-\varepsilon$ και $n=1+\zeta$ στην (7), κατά προσέγγιση παίρνουμε

$$\zeta_{\frac{1}{2}}=\frac{4\varepsilon_\kappa-\varepsilon_\pi}{3}=\frac{1}{6}\left(4K_\kappa^2-K_\pi^2\right)=\frac{1}{6}\left[4.(0.05)^2-(0.014)^2\right],$$

$$P_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2,7.10^{-4}}\zeta_{\frac{1}{2}}=6\text{ atm}.$$

Η αντίστοιχη τιμή του δείκτη διάθλασης είναι n = 1.00162.

Παίρνουμε

$$\theta_{\kappa} = 1.6^{\circ}, \qquad \theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa} = 3.2^{\circ}.$$

Δεν παρατηρούμε δακτύλιο αφού

$$P_{\frac{1}{2}} = 6\,\text{atm} < 16\,\text{atm} = P_{\text{min}} \quad \text{για πρωτόνια.}$$

4.

4.1. Παραγωγίζοντας στα δύο μέλη της

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$$

έχουμε

$$\frac{\sin\theta.\Delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta\beta}{\beta} \tag{8}$$

Παραγωγίζοντας την (3a) έχουμε

$$\frac{\Delta\beta}{1-\beta} = 2\frac{\Delta p}{p} \tag{9}$$

Συνδυάζοντας την (8) και την (9), λαμβάνοντας υπόψιν την (3b) και θέτοντας περίπου $\tan\theta = \theta$, παίρνουμε

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta p} = \frac{2}{\theta}\frac{1-\beta}{p\beta} = \frac{K^2}{\theta p} \tag{10}$$

Οπότε

-για τα καόνια $K_{\kappa} = 0.05$, $\theta_{\kappa} = 1.6^{\circ} = 1.6\frac{\pi}{180}\,\text{rad}$, και έτσι, $\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} = 0.51\frac{1^{\circ}}{\text{GeV}/c}$,

-για τα πιόνια $K_{\pi} = 0.014$, $\theta_{\pi} = 3.2^{\circ}$, και $\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} = 0.02\frac{1^{\circ}}{\text{GeV}/c}$.

Τελικά, $\frac{\Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta p} = (0.51 + 0.02)\frac{1^{\circ}}{\text{GeV}/c} = 0.53\frac{1^{\circ}}{\text{GeV}/c}$.

4.2. Η συνθήκη για να είναι οι δύο δακτύλιοι διακρίσιμοι είναι: $\Delta\theta < 0.1(\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}) = 0.16^{o}$.

Ακόλουθα $\Delta p < \frac{1}{10} \times \frac{1.6}{0.53} = 0.3 \text{ GeV}/c$.

5. Η κατώτερη τιμή του β που οδηγεί σε φαινόμενο Cherenkov είναι

$$\beta = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}. \qquad (11)$$

Η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου που έχει μάζα ηρεμίας M και ενέργεια E δίνεται από την έκφραση

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]. \qquad (12)$$

Αντικαθιστώντας την οριακή τιμή (11) του β στην (12), παίρνουμε την ελάχιστη κινητική ενέργεια του σωματιδίου ώστε να προκύπτει φαινόμενο Cherenkov

$$T = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} - 1\right] = 0.51 \quad Mc^2 \qquad (13).$$

Για τα σωμάτια α

$$T = 0.51 \times 3.8 \text{ GeV} = 1.94 \text{ GeV},$$

Για τα ηλεκτρόνια

$$T = 0.51 \times 0.51 \text{ MeV} = 0.26 \text{ MeV}.$$

Αφού η κινητική ενέργεια των σωματίων που εκπέμπονται από ραδιενεργή πηγή δεν ξεπερνούν τα μερικά MeV, αυτά είναι ηλεκτρόνια που δίνουν ακτινοβολία Cherenkov στο πείραμα που μελετάμε.

6. Για δέσμη σωματίων που έχουν ορισμένη ορμή η εξάρτηση από τη γωνία θ του δείκτη διάθλασης n του μέσου, δίνεται από την έκφραση

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \qquad (14)$$

6.1. Έστω $\delta\theta$ η διαφορά των θ μεταξύ δύο δακτυλίων που αντιστοιχούν σε δύο μήκη κύματος στο ορατό, π.χ. 0.4 μm και 0.8 μm, αντίστοιχα. Η διαφορά στο δείκτη διάθλασης γι αυτά τα μήκη κύματος είναι $n_v - n_r = \delta n = 0.02(n-1)$.

Με λογαριθμική παραγώγιση και στα δύο μέλη της (14) έχουμε

$$\frac{\sin\theta.\delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\delta n}{n} \tag{15}$$

Αντίστοιχα για την πίεση του ακτινοβολητή $P = 6$ atm έχουμε από 4.2 τις τιμές $\theta_\pi = 3{,}2^\circ$, $n = 1.00162$.

Θέτοντας προσεγγιστικά $\tan\theta = \theta$ και $n = 1$, έχουμε $\delta\theta = \dfrac{\delta n}{\theta} = 0.033^\circ$.

6.2.

6.2.1.Η διεύρυνση λόγω διασκεδασμού είναι (6.1)

$$\frac{1}{2}\delta\theta = 0.017^\circ$$

6.2.2. Η διεύρυνση λόγω αχρωματικού χαρακτήρα είναι, από 4.1., $0.02\dfrac{1^\circ}{\text{GeV/c}} \times 0.3\ \text{GeV/c} = 0.006^\circ$, τρεις φορές μικρότερη από την παραπάνω.

6.2.3. Το χρώμα αλλάζει από κόκκινο σε λευκό και μετά σε μπλε από το εσωτερικό προς το εξωτερικό.