

ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΤΟΥ ΑΕΡΑ ΜΕ ΤΟ ΥΨΟΣ, ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΡΥΠΑΝΣΗ ΤΟΥ ΑΕΡΑ

Στην κατακόρυφη κίνηση του αέρα οφείλονται πολλές ατμοσφαιρικές διαδικασίες, όπως ο σχηματισμός των νεφών και η διασπορά των ρύπων. Αν η ατμόσφαιρα είναι σταθερή, η κατακόρυφη κίνηση είναι περιορισμένη και οι ρύποι του αέρα τείνουν να συσσωρεύονται γύρω από την περιοχή εκπομπής παρά να διασκορπίζονται και να διαλύονται. Αντίθετα, σε μια ασταθή ατμόσφαιρα η κατακόρυφη κίνηση του αέρα διευκολύνει την κατακόρυφη διασπορά των ρύπων. Συνεπώς, οι συγκεντρώσεις των ρύπων εξαρτώνται όχι μόνο από την ένταση της πηγής που τους εκπέμπει αλλά και από τη σταθερότητα της ατμόσφαιρας.

Στη μετεωρολογία προσδιορίζουμε τη σταθερότητα του αέρα με τη χρήση της έννοιας *πακέτο αέρα* για μια καθορισμένη ποσότητα αέρα και συγκρίνοντας τη θερμοκρασία του πακέτου αέρα, το οποίο υφίσταται αδιαβατικές αυξήσεις και μειώσεις, με εκείνη του περιβάλλοντος αέρα. Σε πολλές περιπτώσεις ένα πακέτο αέρα το οποίο περιέχει ρύπους και ανεβαίνει από το έδαφος σταματάει σε ένα συγκεκριμένο υψόμετρο, το οποίο καλείται *ύψος ανάμιξης*. Όσο μεγαλύτερο είναι το ύψος ανάμιξης, τόσο μικρότερη είναι η συγκέντρωση των ρύπων. Θα εκτιμήσουμε το ύψος ανάμιξης και τη συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα (CO) το οποίο εκπέμπεται από τις μοτοσυκλέτες στην κεντρική, μητροπολιτική περιοχή του Hanoi (Ανόι) και σε ώρα κυκλοφοριακής αιχμής, κατά την οποία η κατακόρυφη ανάμιξη είναι απαγορευμένη λόγω της θερμοκρασιακής αναστροφής (η θερμοκρασία του αέρα αυξάνεται με το ύψος) σε υψόμετρο πάνω από 119 m.

Θεωρήστε τον αέρα ως ένα ιδανικό διατομικό αέριο, με μοριακή μάζα $\mu = 29 \text{ g/mol}$.

Η quasi-αδιαβατική μεταβολή υπακούει στη σχέση $pV^\gamma = \text{const}$, όπου $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

είναι ο λόγος μεταξύ της ισοβαρούς και ισόχωρης ειδικής θερμότητας του αερίου.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα πιο κάτω δεδομένα, όπου χρειαστούν:

Παγκόσμια σταθερά των αερίων $R = 8.31 \text{ J/mol.K}$.

Ατμοσφαιρική πίεση στο έδαφος $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$.

Επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Ισοβαρής ειδική θερμότητα: $c_p = \frac{7}{2}R$ για τον αέρα.

Ισόχωρη ειδική θερμότητα: $c_v = \frac{5}{2}R$ για τον αέρα.

Μαθηματικά δεδομένα.

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (με A και B σταθερές) δίνεταιαπό τη: $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$ όπου $x_1(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0.$$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

1. Μεταβολή της πίεσης με το ύψος.

1.1. Θεωρήστε ότι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας είναι παντού η ίδια σταθερή και ίση με T_0 . Να αποδείξετε την εκθετική σχέση η οποία δίνει την ατμοσφαιρική πίεση p σε σχέση με το ύψος z .

1.2. Υποθέστε ότι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας μεταβάλλεται με το ύψος σύμφωνα με τη σχέση

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

όπου Λ είναι μια σταθερά, η οποία καλείται *βαθμίδα υψομετρικής πτώσης της θερμοκρασίας* (η κατακόρυφη βαθμίδα της θερμοκρασίας είναι Λ).

1.2.1. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την ατμοσφαιρική πίεση p συναρτήσει του ύψους z .

1.2.2. Μια διαδικασία η οποία καλείται ελεύθερη μεταφορά συμβαίνει όταν η πυκνότητα του αέρα αυξάνεται με το ύψος. Για ποιες τιμές του Λ και πάνω συμβαίνει αυτή η διαδικασία;

2. Μεταβολή της θερμοκρασίας ενός πακέτου αέρα σε κατακόρυφη κίνηση

Θεωρήστε ένα πακέτο αέρα το οποίο κινείται προς τα πάνω και προς τα κάτω μέσα στην ατμόσφαιρα. Ένα πακέτο αέρα είναι μια ποσότητα αέρα με συγκεκριμένες διαστάσεις, της τάξης μερικών μέτρων, το οποίο μπορούμε να το διαπραγματευθούμε ως μία ανεξάρτητη θερμοδυναμική οντότητα, αρκετά μικρή ώστε να θεωρούμε ότι η θερμοκρασία της είναι παντού η ίδια. Η κατακόρυφη κίνηση ενός πακέτου αέρα μπορεί να θεωρηθεί ως quasi-αδιαβατική μεταβολή, π.χ η ανταλλαγή θερμότητας με τον περιβάλλοντα αέρα είναι αμελητέα. Αν το πακέτο αέρα ανεβαίνει μέσα στην ατμόσφαιρα, διαστέλλεται και ψύχεται. Αντίθετα, αν αυτό κινείται προς τα κάτω, η αυξανόμενη εξωτερική πίεση θα συμπιέσει τον αέρα μέσα στο πακέτο και η θερμοκρασία του θα αυξηθεί.

Καθώς το μέγεθος του πακέτου δεν είναι μεγάλο, η ατμοσφαιρική πίεση σε διαφορετικά σημεία στα όρια του πακέτου μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την ίδια τιμή $p(z)$, όπου z είναι το υψόμετρο του κεντρικού σημείου του πακέτου αέρα. Η θερμοκρασία στο πακέτο είναι παντού η ίδια και ισούται με $T_{\text{πακέτο}}(z)$, η οποία είναι γενικά διαφορετική από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα $T(z)$. Στα μέρη 2.1 και 2.2, δεν κάνουμε καμιά υπόθεση σχετικά με τη μορφή της $T(z)$.

2.1. Η μεταβολή της θερμοκρασίας του πακέτου αέρα, $T_{\text{πακέτο}}$, σε σχέση με το ύψος δίνεται από τη σχέση $\frac{dT_{\text{πακέτο}}}{dz} = -G$. Να εξάγετε τη μαθηματική έκφραση του $G(T, T_{\text{πακέτο}})$.

2.2. Θεωρήστε ειδικές ατμοσφαιρικές συνθήκες στις οποίες σε κάθε υψόμετρο z η θερμοκρασία T της ατμόσφαιρας είναι ίση με εκείνη του πακέτου $T_{\text{πακέτο}}$, $T(z) = T_{\text{πακέτο}}(z)$. Χρησιμοποιούμε το Γ για να υποδηλώσουμε την τιμή του G όταν $T = T_{\text{πακέτο}}$, δηλαδή $\Gamma = -\frac{dT_{\text{πακέτο}}}{dz}$ (με $T = T_{\text{πακέτο}}$). Το Γ καλείται *βαθμίδα αδιαβατικής μείωσης του ξηρού αέρα*.

2.2.1. Να εξάγετε τη μαθηματική έκφραση του Γ

2.2.2. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή του Γ .

2.2.3. Να εξάγετε τη μαθηματική έκφραση της ατμοσφαιρικής θερμοκρασίας $T(z)$ ως συνάρτηση του υψομέτρου.

2.3. Υποθέστε ότι η ατμοσφαιρική θερμοκρασία εξαρτάται από το υψόμετρο σύμφωνα με τη σχέση $T(z) = T(0) - \Lambda z$, όπου Λ είναι σταθερό. Βρείτε την εξάρτηση της θερμοκρασίας του πακέτου, $T_{\text{πακέτο}}(z)$, σε υψόμετρο z .

2.4. Γράψετε την μαθηματική σχέση για $T_{\text{πακέτο}}(z)$ όταν $|\Lambda z| \ll T(0)$ και $T(0) \approx T_{\text{πακέτο}}$.

3. Η σταθερότητα της ατμόσφαιρας.

Σε αυτό το μέρος υποθέτουμε ότι το T μεταβάλλεται γραμμικά με το υψόμετρο.

3.1. Θεωρήστε ένα πακέτο αέρα που βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία σε σχέση με τον περιβάλλοντα αέρα σε ύψος z_0 , δηλαδή έχει την ίδια θερμοκρασία $T(z_0)$ με αυτή του περιβάλλοντα αέρα. Αν το πακέτο αέρα μετακινηθεί ελαφρά πάνω ή κάτω (π.χ. λόγω ατμοσφαιρικών διαταράξεων), μπορεί να συμβεί μια από τις τρεις πιο κάτω περιπτώσεις:

- Το πακέτο αέρα επανέρχεται στο αρχικό ύψος z_0 , η ισορροπία του πακέτου είναι σταθερή. Η ατμόσφαιρα θεωρείται σταθερή.

- Το πακέτο αέρα συνεχίζει να κινείται προς την αρχική του κατεύθυνση, η ισορροπία του πακέτου είναι ασταθής. Η ατμόσφαιρα θεωρείται ασταθής.

- Το πακέτο παραμένει στη νέα του θέση, η ισορροπία του πακέτου είναι αδιάφορη. Η ατμόσφαιρα θεωρείται ουδέτερη.

Ποια είναι η συνθήκη για το Λ , ώστε η ατμόσφαιρα να θεωρείται σταθερή, ασταθής ή ουδέτερη;

3.2. Ένα πακέτο αέρα έχει θερμοκρασία στο έδαφος $T_{\text{πακέτου}}(0)$ ψηλότερη από τη θερμοκρασία $T(0)$ του περιβάλλοντα αέρα. Η ανοδική δύναμη (άνωση) θα κάνει το πακέτο να ανεβεί. Να εξάγετε την έκφραση που δίνει το μέγιστο ύψος που μπορεί να φτάσει το πακέτο στην περίπτωση που η ατμόσφαιρα είναι σταθερή σε σχέση με το Λ και Γ .

4. Το ύψος ανάμιξης

4.1. Ο πίνακας 1 δείχνει τις θερμοκρασίες του αέρα που καταγράφηκαν από ένα μετεωρολογικό μπαλόνι στις 7: 00 π.μ. μια μέρα του Νοεμβρίου στο Hanoi.

Θεωρήστε ένα πακέτο αέρα θερμοκρασίας $T_{\text{πακέτο}}(0) = 22^{\circ}\text{C}$ που αυξάνεται από το έδαφος. Με βάση τα δεδομένα που δίνονται στον πίνακα 1 και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη γραμμική προσέγγιση, υπολογίστε τη θερμοκρασία της μάζας αέρα σε ύψος 96 m και 119 m.

4.2. Προσδιορίστε τα μέγιστα ύψη H που μπορεί να φτάσει το πακέτο αέρα και τη θερμοκρασία $T_{\text{πακέτο}}(H)$ του πακέτου αέρα.

Το H ονομάζεται ύψος ανάμιξης. Οι ρυπαντές αέρα που εκπέμπονται από το έδαφος μπορούν να αναμιχθούν με τον αέρα της ατμόσφαιρας (για παράδειγμα με τον άνεμο, με στροβιλισμούς του αέρα και τη διασπορά) και διαλύονται μέσα σε αυτό το στρώμα.

Πίνακας 1

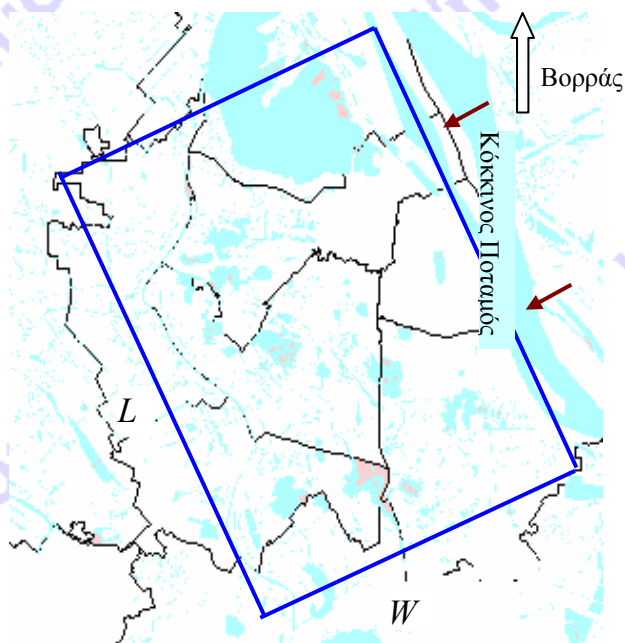
Δεδομένα που καταγράφηκαν από μετεωρολογικό μπαλόνι στις 7:00 π.μ. μια μέρα του Νοέμβρη στο Hanoi.

Ύψος, m	Θερμοκρασία, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4

153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. Υπολογισμός της μόλυνσης από μονοξείδιο του άνθρακα (CO) από μηχανάκια κατά τη διάρκεια της ώρας αιχμής ένα πρωινό στο Hanoi.

Η κεντρική, μητροπολιτική περιοχή του Hanoi προσδιορίζεται κατά προσέγγιση από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις L και W όπως φαίνεται στο σχήμα, με τη μια πλευρά κατά μήκος της νοτιοδυτικής όχθης του Κόκκινου Ποταμού.



Υπολογίζεται ότι υπάρχουν στο δρόμο 8×10^5 μοτοσυκλέτες (παπάκια) κατά τη διάρκεια ενός πρωινού σε ώρα αιχμής από τις 7:00 π.μ. έως τις 8:00 π.μ., οι οποίες κινούνται γύρω στα 5 km και εκπέμπουν 12 g μονοξειδίου του άνθρακα CO ανά

χιλιόμετρο. Το ποσό των ρύπων CO θεωρείται κατά προσέγγιση ότι εκπέμπεται ομοιόμορφα χρονικά, με ένα σταθερό ρυθμό M , κατά τη διάρκεια της ώρας αιχμής.

Ο καθαρός βορειοανατολικός άνεμος που φυσά κάθετα, την ίδια ώρα, προς τον Κόκκινο Ποταμό (κάθετα προς την πλευρά L του ορθογωνίου) με ταχύτητα u , περνά από την πόλη με την ίδια ταχύτητα και μεταφέρει ένα μέρος του μολυσμένου με μονοξείδιο του άνθρακα αέρα μακριά από την ατμόσφαιρα της πόλης.

Χρησιμοποιούμε επίσης το ακόλουθο προσεγγιστικό μοντέλο:

- Το ποσό του μονοξειδίου του άνθρακα CO θεωρείται ότι εκπέμπεται ομοιόμορφα κατά τη διάρκεια του χρόνου, με ένα σταθερό ρυθμό M μέσα σε μια ώρα αιχμής, και σκορπίζεται γρήγορα, έτσι ώστε η συγκέντρωση $C(t)$ του CO μέσα στο χρόνο t είναι περίπου η ίδια στην ατμόσφαιρα πάνω από την κεντρική περιοχή του Hanoi μέχρι το ύψος ανάμιξης H που υπολογίζεται στο σχήμα 4.2, δηλαδή στο ορθογώνιο κουτί με διαστάσεις L , W και H .
- Ο παρασυρόμενος από τον άνεμο αέρας που μπαίνει στο κουτί είναι καθαρός και θεωρείται ότι δεν χάνεται ποσό μολυσμένου αέρα από το κουτί από τις παράλληλες προς τον αέρα πλευρές.
- Πριν τις 7:00 π.μ., η συγκέντρωση CO στην ατμόσφαιρα είναι αμελητέα.

5.1. Να εξάγετε τη διαφορική εξίσωση που καθορίζει τη συγκέντρωση $C(t)$

μονοξειδίου του άνθρακα, CO, σαν συνάρτηση του χρόνου $C(t)$.

5.2. Να γράψετε τη λύση αυτής της εξίσωσης για τη $C(t)$.

5.3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της συγκέντρωσης $C(t)$ στις 8:00 π.μ.

Δίνονται: $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.