Λύση

1. Για μια στοιχειώδη υψομετρική διαφορά dz, η στοιχειώδης μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι:

$$dp = -\rho g dz \tag{1}$$

όπου g είναι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας, θεωρώντας σταθερή την πυκνότητα, ρ του αέρα, τον οποίο θεωρούμε ως ιδανικό αέριο, έχουμε:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

Θέτοντας αυτή την έκφραση στην (1) :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

1.1. Αν η θερμοκρασία του αέρα είναι παντού η ίδια και ίση με T_0

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz$$

Μετά την ολοκλήρωση, έχουμε:

$$p(z) = p(0)\mathbf{e}^{-\frac{\mu g}{RT_0}z} \tag{2}$$

1.2. Εάν

$$T(z) = T(0) - \Lambda z \tag{3}$$

τότε

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R\left[T(0) - \Lambda z\right]} dz \tag{4}$$

1.2.1. Λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι :

$$\int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda}\int \frac{d\left[T(0) - \Lambda z\right]}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda}\mathbf{ln}\left(T(0) - \Lambda z\right)$$

Ολοκληρώνοντας και στα δύο μέλη της (4), παίρνουμε :

$$\mathbf{ln}\frac{p(z)}{p(0)} = \frac{\mu g}{R\Lambda}\mathbf{ln}\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} = \frac{\mu g}{R\Lambda}\mathbf{ln}\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)$$

$$p(z) = p(0)\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}} \qquad (5)$$

1.2.2. Η ελεύθερη μεταφορά προκύπτει όταν:

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} > 1$$

Ο λόγος των πυκνοτήτων μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{p(z)}{p(0)}\frac{T(0)}{T(z)} = \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}-1}$$

Ο τελευταίος όρος είναι μεγαλύτερος της μονάδας όταν ο εκθέτης του είναι αρνητικός:

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} - 1 < 0$$

Έτσι :

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = \frac{0.029 \times 10}{8.31} = 0.035\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

2. Σε κατακόρυφη κίνηση, η πίεση του πακέτου αέρα είναι συνεχώς ίση με εκείνη του περιβάλλοντος αέρα, η οποία εξαρτάται από το υψόμετρο. Η θερμοκρασία του πακέτου T_{parcel} εξαρτάται από την πίεση.

2.1. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = \frac{dT_{\text{parcel}}}{dp}\frac{dp}{dz}$$

p είναι η πίεση του αέρα στο πακέτο και εκείνη του περιβάλλοντος αέραr.

Έκφραση για $\dfrac{dT_{\text{parcel}}}{dp}$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την αδιαβατική διαδικασία $pV^{\gamma} = \text{const}$ και την καταστατική εξίσωση, μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση που μας δίνει τη μεταβολή της πίεσης με τη θερμοκρασία σε μια quasi-αδιαβατική μεταβολή του πακέτου:

$$T_{\text{parcel}} p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \qquad (6)$$

όπου $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ είναι ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων υπό σταθερή πίεση και υπό σταθερό όγκο του αέρα. Παραγωγίζοντας την (6), έχουμε:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{dp}{p} = 0$$

ή

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} = \frac{T_{\text{parcel}}}{p}\frac{\gamma-1}{\gamma} \qquad (7)$$

Σημείωση: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής για να υπολογίσουμε τη θερμότητα που μεταφέρεται στο πακέτο σε μια στοιχειώδη διαδικασία: $dQ = \dfrac{m}{\mu} c_V dT_{\text{parcel}} + pdV$, αυτή είναι μηδέν σε μια αδιαβατική διαδικασία. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση για το πακέτο $pV = \dfrac{m}{\mu} RT_{\text{parcel}}$ μπορούμε να βρούμε (6)

Έκφραση για $\dfrac{dp}{dz}$

Από την (1) παίρνουμε:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg\mu}{RT}$$

όπου T είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα.

Με τη βοήθεια αυτών των δύο εκφράσεων, παίρνουμε την έκφραση για dT_{parcel} / dz :

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{T_{\text{parcel}}}{T} = -G \qquad (8)$$

Γενικά, G δεν είναι σταθερά.

2.2.

2.2.1. Εάν σε κάθε ύψος, $T = T_{\text{parcel}}$, τότε αντί για G in (8), έχουμε :

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R} = \text{const} \tag{9}$$

ή

$$\Gamma = \frac{g}{c_p} \tag{9'}$$

2.2.2. Αριθμητική τιμή:

$$\Gamma = \frac{1.4-1}{1.4}\frac{0.029\times 10}{8.31} = 0.00997\,\frac{\text{K}}{\text{m}} \approx 10^{-2}\,\frac{\text{K}}{\text{m}}$$

2.2.3. Έτσι, η έκφραση για τη θερμοκρασία στο ύψος z σ' αυτήν την ειδικού τύπου ατμόσφαιρα (η οποία καλείται αδιαβατική ατμόσφαιρα) είναι :

$$T(z) = T(0) - \Gamma z \tag{10}$$

2.3. Οι υδρατμοί είναι ένα τριατομικό αέριο, η ειδικές τους θερμότητες είναι $C_p = 4R$ και $C_V = 3R$, ο λόγος τους $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$.Αν το πακέτο περιέχει μη κορεσμένους υδρατμούς, τότε το περιεχόμενό του είναι ένα μίγμα αέρα με γραμμομοριακό λόγο $\dfrac{p_0 - p_{\text{water}}}{p_0}$ και υδρατμών με γραμμομοριακό λόγο $\dfrac{p_{\text{water}}}{p_0}$. Οι ειδικές του θερμότητες είναι οι ακόλουθες:

$$c_p = \frac{\left(p_0 - p_{\text{water}}\right)\frac{7}{2}R + p_{\text{water}}4R}{p_0} = \frac{7}{2}R + \frac{1}{2}\frac{p_{\text{water}}}{p_0}R$$

$$c_V = \frac{5}{2}R + \frac{1}{2}\frac{p_{\text{water}}}{p_0}R$$

Οι υδρατμοί στο πακέτο δεν είναι κορεσμένοι, έτσι $p_{\text{water}} < 2.64$ kPa. Θέτουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{p_{\text{water}}}{p_0} < \frac{2.6}{200} = 0.013 << 1$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} < \frac{7}{5} - \frac{4}{25}\varepsilon = \frac{7}{5} - 0.002$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση (9) για τη βαθμίδα αδιαβατικής μείωσης Γ, μπορούμε να βρούμε το όριο σχετικής μείωσης:

$$\frac{|\Delta\Gamma|}{\Gamma} < \frac{4}{1000}$$

2.4. Για να βρούμε τη $T_{\text{parcel}}(z)$

Αντικαθιστούμε την T στην (7) από την έκφρασή της στην (3), και έχουμε:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{dz}{T(0)-\Lambda z}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\ln\frac{T_{\text{parcel}}(z)}{T_{\text{parcel}}(0)} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\left(-\frac{1}{\Lambda}\right)\ln\frac{T(0)-\Lambda z}{T(0)}$$

Τελικά, παίρνουμε:

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(\frac{T(0)-\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \quad (11)$$

2.5.

Από την (11) έχουμε:

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Εάν $\Lambda z << T(0)$, τότε θέτοντας $x = \frac{T(0)}{\Lambda z}$ παίρνουμε

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}}$$

$$\approx T_{\text{parcel}}(0)\mathbf{e}^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}} \approx T_{\text{parcel}}(0)\left(1-\frac{\Gamma z}{T(0)}\right) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z$$

Έτσι,

$$T_{\text{parcel}}(z) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z \quad (12)$$

3. Σταθερότητα της ατμόσφαιρας

Με σκοπό να μελετήσουμε τη σταθερότητα της ατμόσφαιρας, μπορούμε να ελέγξουμε τη σταθερότητα της ισορροπίας ενός πακέτου αέρα στην ατμόσφαιρα αυτή.

Σε ύψος z_0, όπου $T_{\text{parcel}}(z_0) = T(z_0)$, το πακέτο αέρα είναι σε ισορροπία. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή η πυκνότητα ρ του αέρα του πακέτου είναι ίση με ρ'- εκείνη του περιβάλλοντος αέρα της ατμόσφαιρας. Επομένως, η άνωση που ασκείται στο πακέτο από τον περιβάλλοντα αέρα είναι ίση με το βάρος του πακέτου. Η συνισταμένη αυτών των δύο δυνάμεων είναι μηδέν.

Θυμηθείτε ότι η θερμοκρασία του πακέτου αέρα $T_{\text{parcel}}(z)$ ιδίνεται από την (7), στην οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι κατά προσέγγιση $G = \Gamma$ σε κάθε ύψος z κοντά στο $z = z_0$.

Υποθέστε ότι το πακέτο αέρα ανεβαίνει σε υψηλότερη θέση, σε ύψος $z_0 + d$ (με d>0), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) = T_{\text{parcel}}(z_0) - \Gamma d$ και $T(z_0 + d) = T(z_0) - \Lambda d$.

- Στην περίπτωση κατά την οποία η ατμόσφαιρα έχει βαθμίδα ελάττωσης της θερμοκρασίας $\Lambda > \Gamma$, έχουμε $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) > T(z_0 + d)$, έτσι $\rho < \rho'$. Η άνωση τότε είναι μεγαλύτερη από το βάρος του πακέτου, η συνισταμένη είναι προς τα πάνω και σπρώχνει το πακέτο μακριά από τη θέση ισορροπία του.

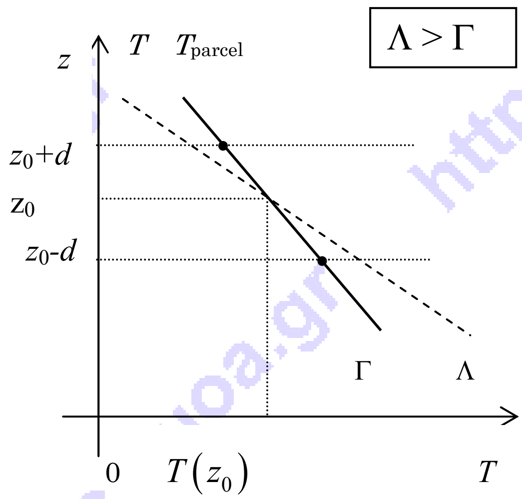
Αντίστροφα, στην περίπτωση που το πακέτο αέρα είναι χαμηλότερα από το ύψος $z_0 - d$ (d>0), έχουμε $T_{\text{parcel}}(z_0 - d) < T(z_0 - d)$ και έτσι $\rho > \rho'$.

Η άνωση είναι τότε μικρότερη από το βάρος του πακέτου; η συνισταμένη είναι προς τα κάτω και σπρώχνει το πακέτο μακριά από τη θέση ισορροπίας του (κοίτα εικόνα 1)
Έτσι η ισορροπία του πακέτου είναι ασταθής, και βρίσκουμε ότι: *ΑΜια ατμόσφαιρα με βαθμίδα ελάττωσης της θερμοκρασίας $\Lambda > \Gamma$ είναι ασταθής.*

- Σε μια ατμόσφαιρα με βαθμίδα ελάττωσης της θερμοκρασίας $\Lambda < \Gamma$, αν το πακέτο αέρα ανεβαίνει σε υψηλότερη θέση, σε ύψος $z_0 + d$ (με d>0), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) < T(z_0 + d)$, τότε $\rho > \rho'$. Η άνωση είναι τότε μικρότερη από το βάρος του πακέτου, η συνισταμένη είναι προς τα κάτω και το σπρώχνει πίσω προς τη θέση ισορροπίας του.

Αντίστροφα, εάν το πακέτο αέρα κατέβει σε ύψος $z_0 - d$ (d >0), $T_{\text{parcel}}(z_0 - d) > T(z_0 - d)$ και τότε $\rho < \rho'$. Η άνωση είναι τότε μεγαλύτερη από το βάρος του πακέτου, η συνισταμένη είναι προς τα πάνω και σπρώχνει το πακέτο επίσης πίσω προς τη θέση ισορροπίας του (κοίτα Εικόνα 2).

Έτσι η ισορροπία του πακέτου είναι σταθερή, και βρίσκουμε ότι: *ΑΜια ατμόσφαιρα με βαθμίδα μείωσης της θερμοκρασίας* $\Lambda < \Gamma$ *είναι σταθερή.*

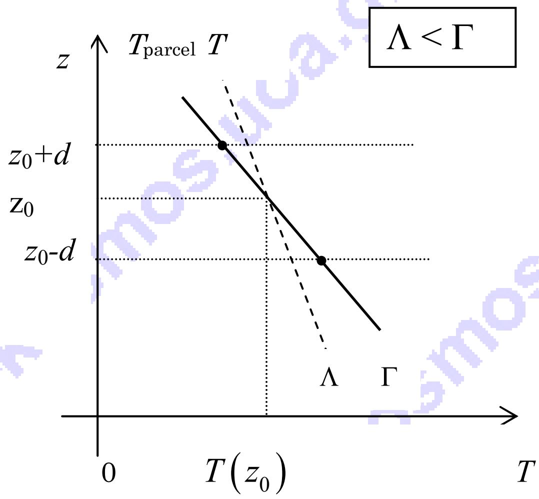


$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho$ πάνω↑

$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho$ κάτω↓

αυσταθής

Εικόνα 1



$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho$ πάνω↑

$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho$ κάτω↓

σταθερή

Εικόνα 2

• Σε ατμόσφαιρα με βαθμίδα μείωσης της θερμοκρασίας $\Lambda=\Gamma$, αν το πακέτο φύγει από τη θέση ισορροπίας του και πάει σε οποιαδήποτε άλλη θέση, θα μείνει εκεί, η ισορροπία είναι αδιάφορη. *Μια ατμόσφαιρα με βαθμίδα μείωσης της θερμοκρασίας* $\Lambda=\Gamma$ είναι ουδέτερη

3.2. Σε μια σταθερή ατμόσφαιρα, με $\Lambda<\Gamma$, ένα πακέτο αέρα, το οποίο στο έδαφος έχει θερμοκρασία $T_{\text{parcel}}(0) > T(0)$ και πίεση $p(0)$ ίση με αυτή της ατμόσφαιρας, μπορεί να ανέρχεται και να φτάνει σε μέγιστο ύψος h, όπου $T_{\text{parcel}}(h)= T(h)$

Σε κατακόρυφη κίνηση από το έδαφος στο ύψος h, το πακέτο αέρα υφίσταται μια αδιαβατική quasi-static (ημι-στατική) διαδικασία, κατά την οποία η θερμοκρασία του μεταβάλλεται από $T_{\text{parcel}}(0)$ σε $T_{\text{parcel}}(h)=T(h)$. Χρησιμοποιώντας την (11), μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{-\frac{\Gamma}{\Lambda}}=\frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(h)}=\frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(0)\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)}$$

$$\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{1-\frac{\Gamma}{\Lambda}}=T_{\text{parcel}}(0)\times T^{-1}(0)$$

$$1-\frac{\Lambda h}{T(0)}=T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)$$

$$h=\frac{1}{\Lambda}T(0)\left[1-T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\right]$$

$$=\frac{1}{\Lambda}\left[T(0)-T_{\text{parcel}}^{-\frac{\Lambda}{\Lambda-\Gamma}}(0)T^{\frac{\Gamma}{\Gamma-\Lambda}}(0)\right]$$

Έτσι, το μέγιστο ύψος h δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$h=\frac{1}{\Lambda}\left[T(0)-\left(\frac{(T(0))^{\Gamma}}{(T_{\text{parcel}}(0))^{\Lambda}}\right)^{\frac{1}{\Gamma-\Lambda}}\right] \qquad (13)$$

4.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα, παίρνουμε τα σημεία του z έναντι της T τα οποία φαίνονται στην Εικόνα 3.

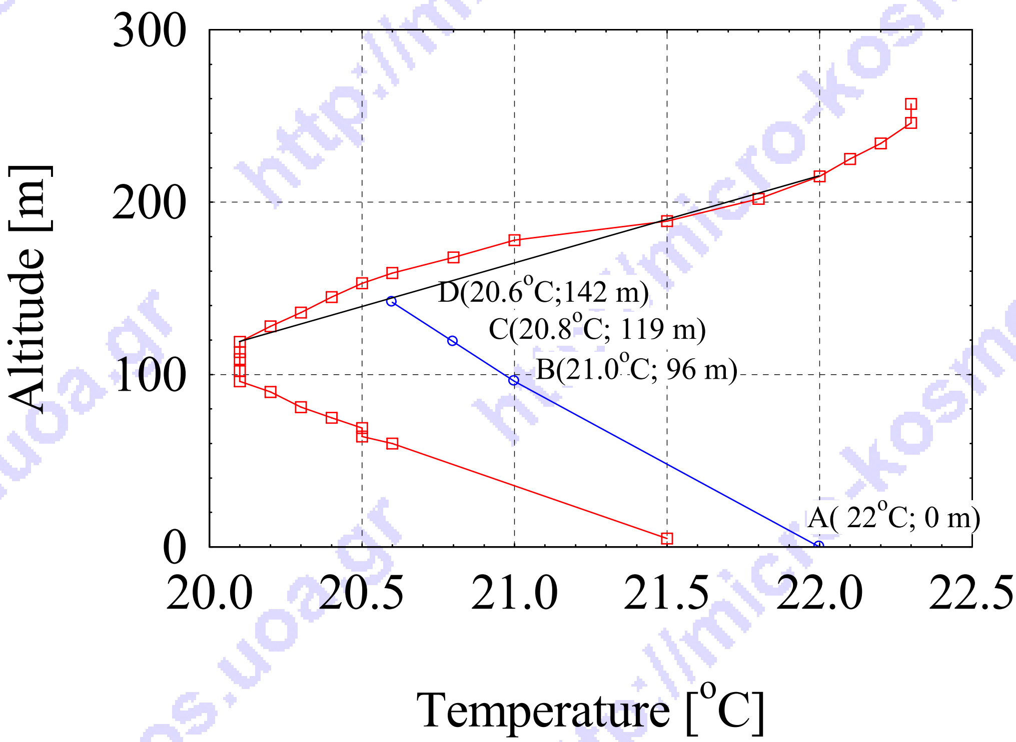


Figure 3

4.1. Μπορούμε να διαιρέσουμε την ατμόσφαιρα κάτω από τα 200m σε τρία στρώματα, αντίστοιχα με τα ακόλουθα ύψη:

(1) $0 < z < 96\text{ m}$, $\Lambda = \dfrac{21.5-20.1}{91} = 15.4\times 10^{-3}\,\dfrac{\text{K}}{\text{m}}$.

(2) $96\text{ m} < z < 119\text{ m}$, $\Lambda = 0$, ισόθερμο στρώμα.

(3) $119\text{ m} < z < 215\text{ m}$, $\Lambda = -\dfrac{22-20.1}{215-119} = -0.02\,\dfrac{\text{K}}{\text{m}}$.

Στο στρώμα (1), η θερμοκρασία του πακέτου μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την (11)

$$T_{\text{parcel}}(96\,\text{m}) = 294.04\text{ K} \approx 294.0\text{ K} \quad \text{that is } 21.0^{\circ}\text{C}$$

Στο στρώμα (2), η θερμοκρασία του πακέτου μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της έκφρασής της σε ισόθερμη ατμόσφαιρα $T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\mathbf{exp}\left[-\dfrac{\Gamma z}{T(0)}\right]$.

Το ύψος 96 m χρησιμοποιείται ως αρχή, αντίστοιχη με τα 0 m. Το ύψος 119 m αντιστοιχεί σε 23 m. Παίρνουμε την ακόλουθη τιμή για τη θερμοκρασία του πακέτου:

$$T_{\text{parcel}}(119\text{ m}) = 293.81\text{ K} \quad \text{η οποία είναι } 20.8^{\text{o}}\text{C}$$

4.2. Στο στρώμα (3), που αρχίζει από τα 119 m, από την (13) βρίσκουμε το μέγιστο ύψος h = 23 m, και την αντίστοιχη θερμοκρασία 293.6 K (ή 20.6 $^{\text{o}}$C).

Τέλος, το ύψος ανάμειξης είναι

$$H = 119 + 23 = 142\text{ m}.$$

Και

$$T_{\text{parcel}}(142\text{ m}) = 293.6\text{ K} \quad \text{δηλαδή} \quad 20.6^{\text{o}}\text{C}$$

Από αυτή τη σχέση, βρίσκουμε $T_{\text{parcel}}(119\text{ m}) \approx 293.82\text{ K}$ και $h = 23\text{ m}$.

Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσεγγιστική σχέση

5.

Θεωρείστε μια αέρια μάζα στην ατμόσφαιρα της Μητροπολιτικής περιοχής του Hanoi να έχει σχήμα παραλληλεπίπεδο με ύψος H, και πλευρές βάσης L και W. Ο ρυθμός εκπομπής αερίου μονοξειδίου του άνθρακα CO από τα μηχανάκια μεταξύ 7 πμ και 8 πμ

$$M = 800\,000 \times 5 \times 12 / 3600 = 13\,300\text{ g/s}$$

Η συγκέντρωση CO στον αέρα είναι παντού η ίδια σε όλα τα σημεία του παραλληλεπιπέδου και συμβολίζεται με $C(t)$.

5.1. Μετά από στοιχειώδη χρόνο dt, λόγω της εκπομπής από τα μηχανάκια, η μάζα του αερίου CO στο παραλληλεπίπεδο αυξάνεται κατά Mdt. Ο άνεμος πνέει παράλληλα προς της μικρές πλευρές W, απομακρύνοντας μια ποσότητα CO με μάζα $LHC(t)udt$.

Έτσι η συγκέντρωση του CO αυξάνεται κατά μια ποσότητα dC σε όλο το παραλληλεπίπεδο. Οπότε:

$$Mdt - LHC(t)udt = LWHdC$$

η

$$\frac{dC}{dt}+\frac{u}{W}C(t)=\frac{M}{LWH} \qquad (14)$$

5.2. Η γενική λύση της (14) είναι :

$$C(t)=K\,\mathbf{exp}\left(-\frac{ut}{W}\right)+\frac{M}{LHu} \qquad (15)$$

Από την αρχική συνθήκη $C(0)=0$, παίρνουμε :

$$C(t)=\frac{M}{LHu}\left[1-\mathbf{exp}\left(-\frac{ut}{W}\right)\right] \qquad (16)$$

5.3. Παίρνοντας ως αρχή των χρόνων τη χρονική στιγμή 7: πμ, τότε η χρονική στιγμή 8: πμ αντιστοιχεί σε t =3600 s. Θέτοντας τα δεδομένα στην (15), έχουμε:

$$C(3600\text{ s})=6.35\times(1-0.64)=2.3\text{ mg/m}^3$$