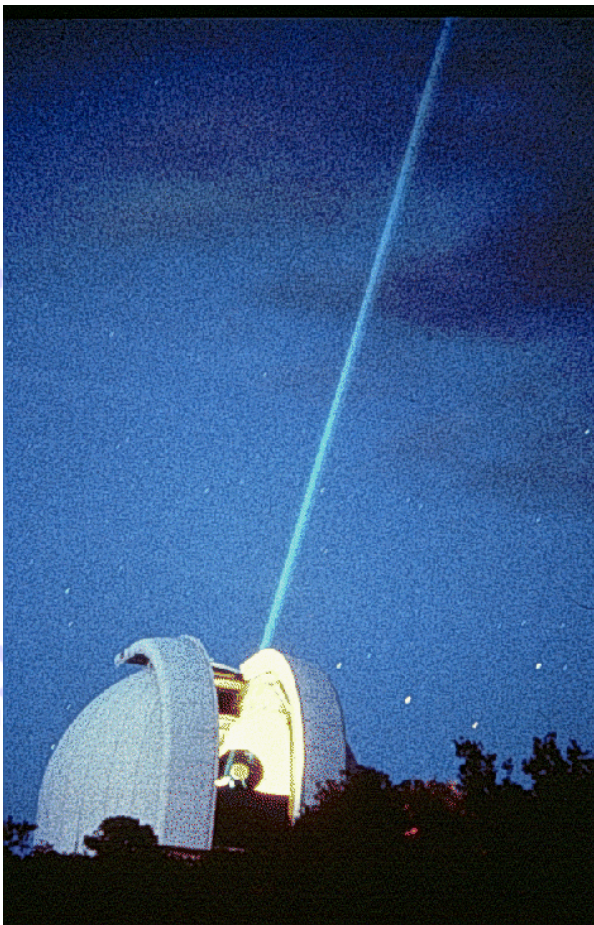


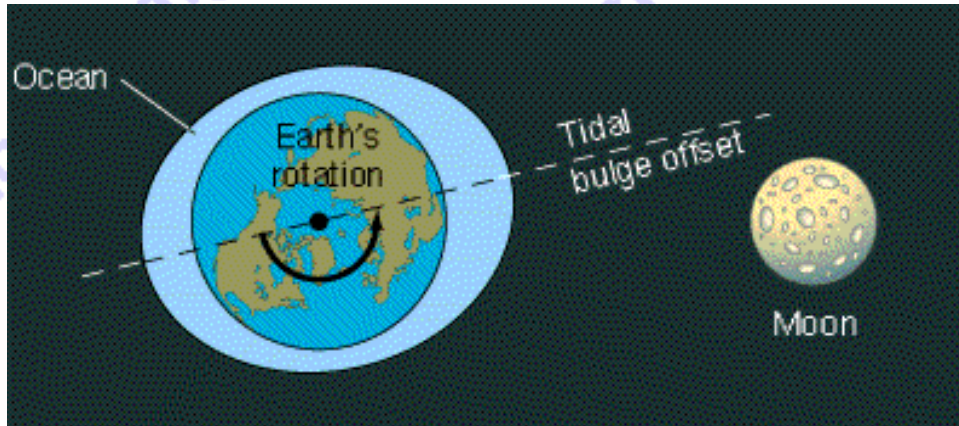
**ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Νο. 1****Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΗΣ-ΣΕΛΗΝΗΣ**

Οι επιστήμονες μπορούν να προσδιορίσουν την απόσταση Γης-Σελήνης, με μεγάλη ακρίβεια. Αυτό μπορούν να το επιτύχουν, ρίχνοντας δέσμη φωτός Laser σε ειδικά κάτοπτρα, τα οποία τοποθετήθηκαν στην επιφάνεια της Σελήνης από τους αστροναύτες το 1969 και μετρώντας το χρόνο που χρειάζεται το φως να καλύψει τη διαδρομή από τη Γη στη Σελήνη και πίσω στη Γη (βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Μια δέσμη laser από ένα παρατηρητήριο στη Γη χρησιμοποιείται για τη μέτρηση με ακρίβεια της απόστασης μεταξύ της Γης και της Σελήνης.

Με αυτές τις μετρήσεις οι επιστήμονες ανακάλυψαν ότι η Σελήνη απομακρύνεται αργά από τη Γη. Έτσι, η απόσταση Γης-Σελήνης αυξάνεται σταδιακά με το χρόνο. Αυτό συμβαίνει λόγω των παλιρροιακών ροπών, όπου η Γη μεταφέρει στροφορμή στη Σελήνη (βλέπε Σχήμα 2). Σε αυτό το πρόβλημα θα προσδιορίσετε τις βασικές παραμέτρους του φαινομένου.



Σχήμα 2. Η βαρύτητα της Σελήνης προκαλεί το φαινόμενο της παλίρροιας στη Γη. Λόγω της περιστροφής της Γης, η γραμμή που περνά διαμέσου των παλιρροιών δεν ευθυγραμμίζεται με τη γραμμή μεταξύ της Γης και της Σελήνης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπής η οποία μεταφέρει στροφορμή από τη Γη στη Σελήνη. Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα.

### 1. Διατήρηση Στροφορμής

Έστω  $L_1$  η παρούσα στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης. Να κάνετε τις ακόλουθες υποθέσεις: i)  $L_1$  είναι μόνο το άθροισμα της στροφορμής της Γης γύρω από τον άξονά της και της στροφορμής της Σελήνης λόγω της περιφοράς της γύρω από τη Γη. ii) Η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι κυκλική και η Σελήνη μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο. iii) Ο άξονας περιστροφής της Γης και ο άξονας γύρω από τον οποίο περιφέρεται η Σελήνη είναι παράλληλοι. iv) Για λόγους απλότητας στους υπολογισμούς, θεωρούμε την κίνηση να είναι γύρω από το κέντρο της Γης και όχι γύρω από το κέντρο μάζας. Σε όλα τα ερωτήματα του προβλήματος, οι ροπές και οι ροπές αδράνειας ορίζονται ως προς τον άξονα περιστροφής της Γης.

v) Η επίδραση του Ήλιου είναι αμελητέα.

1a	Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την παρούσα συνολική στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης. Να γράψετε αυτή την εξίσωση σε σχέση με τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της, $I_E$ , την παρούσα γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης, $\omega_{E1}$ , την παρούσα ροπή αδράνειας της Σελήνης ως προς το κέντρο της Γης, $I_M$ και την παρούσα γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη, $\omega_{M1}$ .	0.2
----	--	-----

Αυτή η διαδικασία της μεταφοράς στροφορμής από τη Γη στη Σελήνη θα σταματήσει, όταν η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της και η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη, αποκτήσουν την ίδια τιμή. Τότε, οι παλίρροιες της Σελήνης στη Γη, θα ευθυγραμμιστούν με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης και έτσι η ροπή θα μηδενιστεί.

1b	Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τελική συνολική στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης, $L_2$ . Να κάνετε τις ίδιες υποθέσεις που κάνατε για την ερώτηση 1a. Να γράψετε αυτή την εξίσωση, σε σχέση με τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της, $I_E$ , την τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης και τη γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης, $\omega_2$ και την τελική ροπή αδράνειας της Σελήνης ως προς το κέντρο της Γης, $I_{M2}$ .	0.2
----	---	-----

1c	Να αγνοήσετε στο ερώτημα αυτό, τη συνεισφορά της περιστροφής της Γης, στην τελική στροφορμή. Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει τη διατήρηση της στροφορμής σε αυτό το πρόβλημα.	0.3
----	---	-----

## 2. Τελική Απόσταση Γης-Σελήνης και Τελική Γωνιακή Ταχύτητα του Συστήματος Γης-Σελήνης.

Υποθέστε ότι, η εξίσωση της βαρυτικής έλξης για κυκλική τροχιά (της Σελήνης γύρω από τη Γη) ισχύει πάντα. Αγνοήστε την περιστροφή της Γης στην τελική συνολική στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης.

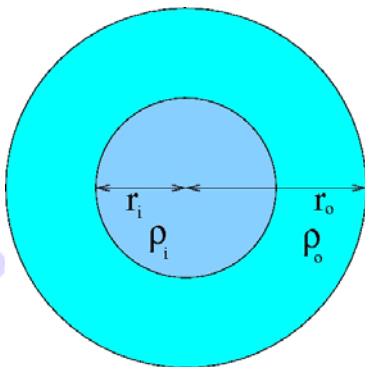
2a	Να γράψετε την εξίσωση της βαρυτικής έλξης για την κυκλική τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη, στην τελική κατάσταση, σε σχέση με τα φυσικά μεγέθη $M_E$ , $\omega_2$ , $G$ και της τελικής απόστασης Γης-Σελήνης, $D_2$ . $M_E$ είναι η μάζα της Γης και $G$ είναι η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας.	0.2
----	---	-----

2b	Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τελική απόσταση Γης-Σελήνης, $D_2$ , σε σχέση με τις γνωστές παραμέτρους, τη στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης, $L_1$ , τις μάζες της Γης και της Σελήνης, $M_E$ και $M_M$ αντίστοιχα και της παγκόσμιας σταθεράς βαρύτητας, $G$ .	0.5
----	---	-----

2c	Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τελική γωνιακή ταχύτητα $\omega_2$ του συστήματος Γης-Σελήνης, σε σχέση με τις γνωστές παραμέτρους, $L_1$ , $M_E$ , $M_M$ και $G$ .	0.5
----	---	-----

Πιο κάτω, θα σας ζητηθεί να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των φυσικών μεγεθών  $D_2$  και  $\omega_2$ . Για τον σκοπό αυτό, χρειάζεται να ξέρετε τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της.

2d	Να γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της, $I_E$ , υποθέτοντας ότι η Γη έχει σφαιρικό σχήμα με εσωτερική πυκνότητα $\rho_1$ από το κέντρο της Γης σε ακτίνα $r_1$ και με εξωτερική πυκνότητα $\rho_0$ από την ακτίνα $r_1$ μέχρι την επιφάνεια, σε ακτίνα $r_0$ από το κέντρο (βλέπε Σχήμα 3)	0.5
----	---	-----



Σχήμα 3. Η Γη ως σφαίρα με δύο πυκνότητες,  $\rho_i$  και  $\rho_o$ .

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των φυσικών μεγεθών που ζητούνται σε αυτό το πρόβλημα, πάντα με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.

2e	Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της, $I_E$ , χρησιμοποιώντας τις τιμές: $\rho_1 = 1.3 \times 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$ , $r_1 = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ , $\rho_0 = 4.0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ και $r_0 = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .	0.2
----	--	-----

Οι μάζες της Γης και της Σελήνης είναι:  $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ Kg}$  και  $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ Kg}$  αντίστοιχα. Η παρούσα απόσταση μεταξύ της Γης και της Σελήνης είναι  $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ . Η παρούσα γωνιακή ταχύτητα της Γης γύρω από τον άξονά της είναι  $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ . Η παρούσα γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι  $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$ . Η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας είναι  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

2f	Υπολογίστε το μέτρο της συνολικής στροφορμής του συστήματος Γης-Σελήνης, $L_1$ .	0.2
----	--	-----

2g	Υπολογίστε την τελική απόσταση Γης-Σελήνης, $D_2$ , σε μέτρα και σε μονάδες της παρούσας απόστασης Γης-Σελήνης, $D_1$ .	0.3
----	---	-----

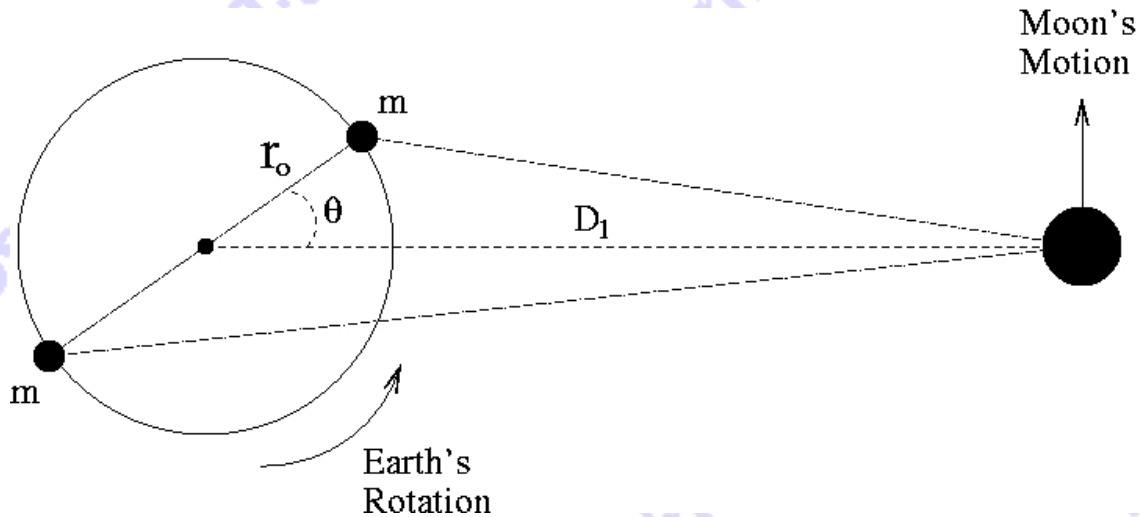
2h	Υπολογίστε το μέτρο της τελικής γωνιακής ταχύτητας, $\omega_2$ , σε $rad/s$ , καθώς και την τελική διάρκεια της ημέρας σε μονάδες της παρούσας διάρκειας ημέρας.	0.3
----	--	-----

Μπορείτε να δείξετε τώρα ότι, η υπόθεση να αγνοήσετε τη συνεισφορά της περιστροφής της Γης, στην τελική συνολική στροφορμή, είναι σε συμφωνία με το αποτέλεσμα του ηλίκου της τελικής στροφορμής της Γης με αυτή της Σελήνης. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι πολύ μικρό.

2i	Υπολογίστε το ηλίκο της τελικής στροφορμής της Γης, με αυτή της Σελήνης.	0.2
----	--	-----

### 3. Πόσο απομακρύνεται η Σελήνη από τη Γη σε ένα χρόνο;

Τώρα, θα προσδιορίσετε πόσο απομακρύνεται η Σελήνη από τη Γη σε ένα χρόνο. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να γνωρίζετε την εξίσωση για την παρούσα ροπή που ασκείται στη Σελήνη από τη Γη. Υποθέστε ότι οι παλίρροιες που προκαλούνται στη Γη από τη Σελήνη προσεγγίζονται πάνω σε δύο υλικά σημεία, το καθένα με μάζα  $m$ , που βρίσκονται στην επιφάνεια της Γης (βλέπε Σχήμα 4). Έστω  $\theta$  η γωνία μεταξύ της ευθείας που ενώνει τις δύο μάζες  $m$  και της ευθείας που ενώνει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης.



Σχήμα 4. Διάγραμμα για τον προσδιορισμό της ροπής που δημιουργείται στη Σελήνη από τις σημειακές παλιρροιακές μάζες  $m$ . Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.

3a	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της δύναμης, $F_c$ , που ασκείται στη Σελήνη, από την πιο κοντινή προς τη Σελήνη μάζα $m$ .	0.4
----	--	-----

3b	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της δύναμης, $F_f$ , που ασκείται στη Σελήνη, από την πιο μακρινή προς τη Σελήνη μάζα $m$ .	0.4
----	--	-----

Μπορείτε τώρα να υπολογίσετε τις ροπές που προκαλούνται από τις δύο μάζες  $m$ .

3c	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ροπής, $\tau_c$ , που ασκείται στη Σελήνη από την πιο κοντινή προς τη Σελήνη μάζα $m$ .	0.4
----	--	-----

3d	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ροπής, $\tau_f$ , που ασκείται στη Σελήνη από την πιο μακρινή προς τη Σελήνη μάζα $m$ .	0.4
----	--	-----

3e	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της συνολικής ροπής, $\tau$ , που ασκείται στη Σελήνη από τις δύο μάζες. Εφόσον, $r_0 \ll D_1$ , να προσεγγίσετε την απάντησή σας στη μικρότερη σημαντική τάξη του πηλίκου $r_0 / D_1$ . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $(1+x)^a \approx 1+ax$ , εάν $x \ll 1$ .	1.0
----	---	-----

3f	Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της συνολικής ροπής, $\tau$ , που ασκείται στη Σελήνη από τις δύο μάζες, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\theta = 3^\circ$ και $m = 3.6 \times 10^{16} \text{ kg}$ (σημειώστε ότι η μάζα $m$ είναι της τάξης $10^{-8}$ φορές της μάζας της Γης).	0.5
----	--	-----

Εφόσον η ροπή είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε την αύξηση της παρούσας απόστασης Γης-Σελήνης σε ένα χρόνο. Για το σκοπό αυτό εκφράστε τη στροφορμή της Σελήνης σε σχέση μόνο με τα φυσικά μεγέθη  $M_E$ ,  $M_M$ ,  $D_1$  και  $G$ .

3g	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει την αύξηση της παρούσας απόστασης Γης-Σελήνης σε ένα χρόνο. Υπολογίστε την τιμή της αύξησης αυτής.	1.0
----	--	-----

Τελικά, μπορείτε να προσδιορίσετε την αύξηση της διάρκειας της μέρας σε ένα χρόνο.

3h	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει τη μείωση της γωνιακής ταχύτητας $\omega_{E1}$ σε ένα χρόνο και άρα να υπολογίσετε τη διάρκεια της αύξησης της παρούσας ημέρας, σε ένα χρόνο.	1.0
----	---	-----

#### 4. Πού μεταφέρεται η ενέργεια;

Σε αντίθεση με τη στροφορμή του συστήματος Γης-Σελήνης, η οποία διατηρείται, η ολική ενέργεια του συστήματος Γης-Σελήνης (περιστροφική και βαρυτική) δεν διατηρείται. Θα ασχοληθείτε με αυτό το θέμα στην τελευταία αυτή παράγραφο.

4a	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει την ολική ενέργεια του συστήματος Γης-Σελήνης, $E$ , (περιστροφική και βαρυτική), (στο παρόν στάδιο). Να εκφράσετε τη σχέση αυτή σε σχέση μόνο με τα φυσικά μεγέθη: $I_E$ , $\omega_{E1}$ , $M_E$ , $M_M$ , $D_1$ και $G$ .	0.4
----	--	-----

4b	Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει τη μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος Γης-Σελήνης, $\Delta E$ , ως συνάρτηση της μεταβολής του μεγέθους $D_1$ και της μεταβολής του μεγέθους $\omega_{E1}$ . Υπολογίστε την τιμή της μεταβολής $\Delta E$ για ένα χρόνο, χρησιμοποιώντας τις τιμές των μεταβολών στα μεγέθη $D_1$ και $\omega_{E1}$ που βρήκατε στην ερώτηση 3g και 3h.	0.4
----	---	-----

Μπορείτε να δείξετε τώρα ότι η απώλεια ενέργειας  $\Delta E$  είναι σε συμφωνία με την ενέργεια που αποδίδεται σε μάζα νερού λόγω της παλίρροιας που προκαλεί η Σελήνη στη Γη. Υποθέστε για απλότητα ότι, όλη η επιφάνεια της Γης καλύπτεται με νερό. Υποθέστε ότι το νερό ανεβαίνει λόγω παλίρροιας σε μέσο ύψος  $h = 0.5 \text{ m}$ . Αυτό συμβαίνει δύο φορές την ημέρα. Υποθέστε ακόμη ότι 10% αυτής της μεταβολής της βαρυτικής ενέργειας, αποδίδεται σε θερμότητα. Δίνεται ότι η πυκνότητα του νερού είναι  $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ .

4c	Υπολογίστε τη μάζα, σε $kg$ , του στρώματος νερού που καλύπτει τη Γη, λόγω παλίρροιας, όπως περιγράφεται πιο πάνω.	0.2
4d	Υπολογίστε, σε $J$ , την ενέργεια που αποδίδεται σε θερμότητα σε ένα χρόνο. Συγκρίνετε την τιμή αυτή της θερμότητας, με την ενέργεια που χάνεται από το σύστημα Γης-Σελήνης σε ένα χρόνο.	0.3