**ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ No. 1**

**ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΗ-ΣΕΛΗΝΗ**

**ΛΥΣΕΙΣ**

## 1. Διατήρηση της στροφορμής

| | | |
|---|---|---|
| 1a | $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1b | $L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2}\omega_2$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | $I_E \omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = I_{M2}\omega_2 = L_1$ | 0.3 |

## 2. Τελικός διαχωρισμός και Γωνιακή συχνότητα του συστήματος Γη-Σελήνη.

| | | |
|---|---|---|
| 2a | $\omega_2^2 D_2^3 = GM_E$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | $D_2 = \dfrac{L_1^2}{GM_E M_M^2}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | $\omega_2 = \dfrac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | Η ροπή αδράνειας της Γης θα είναι το άθροισμα της ροπής αδράνειας μιας σφαίρας με ακτίνα $r_o$ και πυκνότητα $\rho_o$ και μιας σφαίρας με ακτίνα $r_i$ και πυκνότητα $\rho_i - \rho_o$: $I_E = \dfrac{2}{5}\dfrac{4\pi}{3}[r_o^5 \rho_o + r_i^5(\rho_i - \rho_o)]$ . | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2e | $I_E = \dfrac{2}{5}\dfrac{4\pi}{3}[r_o^5 \rho_o + r_i^5(\rho_i - \rho_o)] = 8.0\times10^{37}$ kg m$^2$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2f | $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = 3.4\times10^{34}$ kg m$^2$ s$^{-1}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2g | $D_2 = 5.4\times10^8$ m, που είναι $D_2 = 1.4\, D_1$ | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2h | $\omega_2 = 1.6\times10^{-6}$ s$^{-1}$, που αντιστοιχεί σε περίοδο 46 ημέρες. | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2i | Αφού $I_E\, \omega_2 = 1.3\times10^{32}$ kg m$^2$ s$^{-1}$ και $I_{M2}\, \omega_2 = 3.4\times10^{34}$ kg m$^2$ s$^{-1}$, η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αφού η τελική στροφορμή της Γης είναι το 1/260 εκείνης της Σελήνης. | 0.2 |

### 3. Πόσο απομακρύνεται η Σελήνη σε ένα χρόνο?

| | | |
|---|---|---|
| 3a | Από το νόμο των συνημίτονων, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη Σελήνη από την κοντινότερη σ' αυτή μάζα $m$ θα είναι: $F_c = \dfrac{G\, m\, M_M}{D_1^2 + r_o^2 - 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | Από το νόμο των συνημιτόνων, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη Σελήνη από τη μακρινότερη σ' αυτή μάζα θα είναι: $F_f = \dfrac{G\, m\, M_M}{D_1^2 + r_o^2 + 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | Using the law of sines, the torque will be $\tau_c = F_c \dfrac{\sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 - 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{1/2}} = \dfrac{G\, m\, M_M \sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 - 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3d | Από το νόμο των ημιτόνων, η ροπή θα είναι $\tau_f = F_f \dfrac{\sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 + 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{1/2}} = \dfrac{G\, m\, M_M \sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 + 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3e | $\tau_c - \tau_f = G\, m\, M_M \sin(\theta)\, r_0\, D_1^{-2}\, \left(1 - \dfrac{3 r_o^2}{2 D_1^2} + \dfrac{3 r_o \cos(\theta)}{D_1} - 1 + \dfrac{3 r_o^2}{2 D_1^2} + \dfrac{3 r_o \cos(\theta)}{D_1}\right)$ $= \dfrac{6\, G\, m\, M_M\, r_o^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{D_1^3}$ | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3f | $\tau = \dfrac{6 G m M_M r_o^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{D_1^3} = 4.1\times 10^{16}\,\mathrm{N\,m}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3g | Αφού $\omega_{M1}^2 D_1^3 = GM_E$, έχουμε ότι η στροφορμή της Σελήνης είναι:<br>$I_{M1}\,\omega_{M1} = M_M\, D_1^2 \left[\dfrac{G M_E}{D_1^3}\right]^{1/2} = M_M\,[D_1\, G\, M_E]^{1/2}$<br>Η ροπή θα είναι:<br>$\tau = \dfrac{M_M\,[G M_E]^{1/2}\,\Delta(D_1^{1/2})}{\Delta t} = \dfrac{M_M\,[G M_E]^{1/2}\,\Delta D_1}{2[D_1]^{1/2}\Delta t}$<br>Έτσι έχουμε ότι<br>$\Delta D_1 = \dfrac{2\,\tau\,\Delta t}{M_M}\left[\dfrac{D_1}{G M_E}\right]^{1/2}$<br>Οπότε για $\Delta t = 3.1\times 10^7$ s = 1 year, προκύπτει $\Delta D_1 = 0.034$ m.<br>Αυτή είναι η ετήσια αύξηση της απόστασης Γης-Σελήνης. | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3h | Με τη χρήση της σχέσης<br>$\tau = -\dfrac{I_E\,\Delta\omega_{E1}}{\Delta t}$<br>έχουμε ότι<br>$\Delta\omega_{E1} = -\dfrac{\tau\,\Delta t}{I_E}$<br>Η οποία για $\Delta t = 3.1\times 10^7$ s = 1 year δίνει<br>$\Delta\omega_{E1} = -1.6\times 10^{-14}\,\mathrm{s}^{-1}$.<br>Αν $P_E$ είναι η θεωρούμενη χρονική περίοδος, θα έχουμε ότι:<br>$\dfrac{\Delta P_E}{P_E} = -\dfrac{\Delta\omega_{E1}}{\omega_E}$<br>αφού $P_E = 1\,day = 8.64\times 10^4$ s, παίρνουμε<br>$\Delta P_E = 1.9\times 10^{-5}$ s.<br>Αυτή είναι η αύξηση της διάρκειας της ημέρας σε ένα χρόνο. | 1.0 |

### 4. Πού μεταφέρεται η ενέργεια?

| | | |
|---|---|---|
| 4a | Η παρούσα συνολική (στροφική κινητική και βαρυτική δυναμική) ενέργεια του συστήματος είναι:<br>$E = \dfrac{1}{2} I_E\,\omega_{E1}^2 + \dfrac{1}{2} I_M\,\omega_{M1}^2 - \dfrac{G M_E M_M}{D_1}$.<br>Από τη σχέση | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\omega_{M1}^2 D_1^3 = G M_E$, παίρνουμε<br>$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{1}{2} \frac{G M_E M_M}{D_1}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 4b | $\Delta E = I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{1}{2} \frac{G M_E M_M}{D_1^2} \Delta D_1$, η οποία δίνει<br>$\Delta E = -9.0 \times 10^{19}$ J | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4c | $M_{water} = 4\pi r_o^2 \times h \times \rho_{water}$ kg = $2.6 \times 10^{17}$ kg. | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4d | $\Delta E_{water} = -g M_{water} \times 0.5\, m \times 2\, day^{-1} \times 365\, days \times 0.1 = -9.3 \times 10^{19}$ J. Έτσι, εκτιμάται ότι οι δύο ενέργειες είναι συγκρίσιμες. | 0.3 |