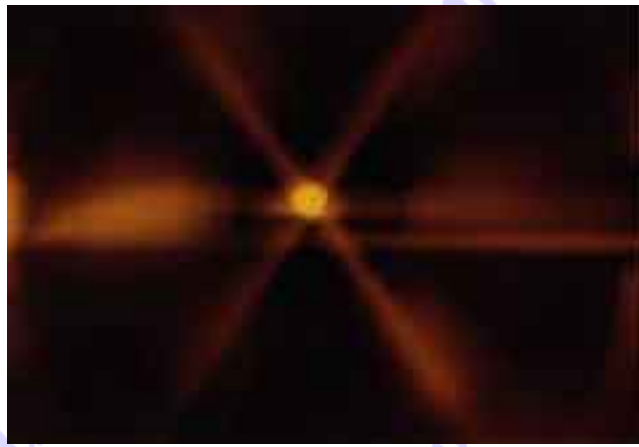


## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ No. 2

### “DOPPLER LASER ΨΥΞΗ” ΚΑΙ “ΟΠΤΙΚΕΣ ΜΕΛΑΣΣΕΣ”

Ο σκοπός αυτού του προβλήματος είναι η ανάπτυξη μιας απλής θεωρίας για να κατανοήσουμε δύο φαινόμενα, που ονομάζονται «laser ψύξη» και «οπτικές μελάσες». Τα φαινόμενα αφορούν τη ψύξη δέσμης ηλεκτρικά ουδέτερων ατόμων με την ανάστροφη διάδοση δέσμης laser με την ίδια συχνότητα. Αυτό είναι μέρος της εργασίας για το βραβείο Nobel στη Φυσική που απενεμήθη στους S. Chu, P. Phillips και C. Cohen-Tannoudji το 1997.



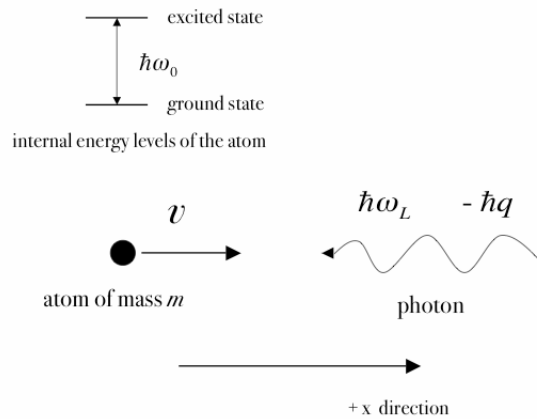
Η πιο πάνω εικόνα δείχνει άτομα νατρίου (η φωτεινή κηλίδα στο κέντρο) παγιδευμένα στην τομή τριών ορθογώνιων δεσμών laser. Η περιοχή αυτή, όπου γίνεται η παγίδευση, ονομάζεται «optical molasses».

Σε αυτό το πρόβλημα, θα αναλύσετε το βασικό φαινόμενο της αλληλεπίδρασης, μεταξύ ενός φωτονίου που προσπίπτει σε ένα άτομο.

#### ΜΕΡΟΣ I: ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΨΥΞΗΣ ΜΕ LASER

Θεωρήστε ένα άτομο μάζας  $m$  να κινείται στην κατεύθυνση  $+x$  με ταχύτητα  $v$ . Για απλότητα, θα θεωρήσουμε το πρόβλημα σε μια διάσταση, δηλαδή, θα αγνοήσουμε τις  $y$  και  $z$  κατευθύνσεις (βλέπε Σχήμα 1). Το άτομο έχει δύο εσωτερικά ενεργειακά επίπεδα. Η ενέργεια του κατώτατου επιπέδου λαμβάνεται να έχει την τιμή μηδέν και η ενέργεια μιας διεγερμένης κατάστασης είναι  $\hbar\omega_0$ , όπου  $\hbar = h/2\pi$ . Το άτομο είναι αρχικά, στο κατώτατο ενεργειακό επίπεδο. Μια δέσμη laser με κυκλική συχνότητα  $\omega_L$  στο εργαστήριο κατευθύνεται στην κατεύθυνση  $-x$  και προσπίπτει στο άτομο. Η δέσμη laser αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό φωτονίων. Το κάθε φωτόνιο έχει ενέργεια  $\hbar\omega_L$  και ορμή  $-\hbar q$ . Ένα φωτόνιο μπορεί να απορροφηθεί από ένα άτομο και ακολούθως αυθόρμητα εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Αυτή η εκπομπή φωτονίου, μπορεί να λάβει χώρα με ίσες πιθανότητες στις δύο κατευθύνσεις  $+x$  και  $-x$ . Εφόσον το άτομο κινείται με μη σχετικιστικές ταχύτητες,  $v/c \ll 1$  (όπου  $c$  η ταχύτητα του φωτός),

Κρατήστε όρους μέχρι και μιας τάξης μεγέθους, μόνο για αυτή την ποσότητα. Θεωρήστε επίσης ότι  $\hbar q / mv \ll 1$ , δηλαδή, η ορμή του ατόμου είναι πολύ μεγαλύτερη από την ορμή ενός φωτονίου. Στις απαντήσεις σας, λάβετε υπόψη αυτές τις προσεγγίσεις.



Σχήμα 1. Διάγραμμα για την απορρόφηση ενός φωτονίου με ενέργεια  $\hbar\omega_L$  και ορμή  $-\hbar q$ , από ένα άτομο μάζας  $m$  και ταχύτητας  $v$ , στη  $+x$  κατεύθυνση. Το άτομο έχει δύο εσωτερικά ενεργειακά επίπεδα με διαφορά ενέργειας  $\hbar\omega_0$ .

Υποθέστε ότι η δέσμη laser με κυκλική συχνότητα  $\omega_L$ , όπως φαίνεται από ένα κινούμενο άτομο, είναι σε συντονισμό με τη διέγερση του ατόμου. Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

### 1. Απορρόφηση.

1a	Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη συνθήκη συντονισμού για την απορρόφηση του φωτονίου.	0.2
1b	Να γράψετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ορμής, $p_{at}$ , του ατόμου μετά την απορρόφηση, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
1c	Να γράψετε τη σχέση που δίνει την ενέργεια, $\varepsilon_{at}$ , του ατόμου μετά την απορρόφηση, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2

## 2. Αυθόρμητη εκπομπή φωτονίου στην κατεύθυνση $-x$ .

Σε κάποια στιγμή, μετά την απορρόφηση του προσπίπτοντος φωτονίου, το άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο στην κατεύθυνση  $-x$ .

2a	Να γράψετε τη σχέση που δίνει την ενέργεια του φωτονίου, που εκπέμπεται από το άτομο, $\varepsilon_{ph}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	--	-----

2b	Να γράψετε τη σχέση που δίνει, το μέτρο της ορμής του φωτονίου που εκπέμπεται από το άτομο, $p_{ph}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	--	-----

2c	Να γράψετε τη σχέση που δίνει, το μέτρο της ορμής του ατόμου, $p_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	--	-----

2d	Να γράψετε τη σχέση που δίνει, την ενέργεια του ατόμου, $\varepsilon_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου	0.2
----	---	-----

## 3. Αυθόρμητη εκπομπή φωτονίου στην κατεύθυνση $+x$ .

Σε κάποια στιγμή, μετά την απορρόφηση του προσπίπτοντος φωτονίου, το άτομο μπορεί, εναλλακτικά, να εκπέμψει ένα φωτόνιο στην κατεύθυνση  $+x$ .

3a	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει την ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται από το άτομο, $\varepsilon_{ph}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	--	-----

3b	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει το μέτρο της ορμής του φωτονίου που εκπέμπεται από το άτομο, $p_{ph}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$ , όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	--	-----

3c	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει το μέτρο της ορμής του ατόμου, $p_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση +x, όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	---	-----

3d	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει την ενέργεια του ατόμου, $\varepsilon_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής στην κατεύθυνση +x, όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2
----	---	-----

#### 4. Μέση Εκπομπή μετά την Απορρόφηση

Η αυθόρμητη εκπομπή ενός φωτονίου στην κατεύθυνση  $-x$  ή στην κατεύθυνση  $+x$  συμβαίνει με την ίδια πιθανότητα. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το γεγονός, απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

4a	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει τη μέση τιμή της ενέργειας του φωτονίου, $\varepsilon_{ph}$ , που εκπέμπεται από το άτομο, μετά τη διαδικασία της εκπομπής.	0.2
----	--	-----

4b	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει τη μέση τιμή του μέτρου της ορμής του φωτονίου, $p_{ph}$ , που εκπέμπεται από το άτομο, μετά τη διαδικασία της εκπομπής.	0.2
----	---	-----

4c	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει τη μέση ενέργεια του ατόμου, $\varepsilon_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής.	0.2
----	---	-----

4d	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει το μέτρο της μέσης ορμής του ατόμου, $p_{at}$ , μετά τη διαδικασία της εκπομπής.	0.2
----	---	-----

### 5. Μεταφορά Ενέργειας και Ορμής.

Υποθέτοντας απορρόφηση και εκπομπή ενός μόνο φωτονίου, όπως περιγράφηκε πιο πάνω, υπάρχει μεταφορά ενέργειας και ορμής μεταξύ της ακτινοβολίας laser και του ατόμου.

5a	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει τη μέση μεταβολή της ενέργειας του ατόμου, $\Delta \varepsilon$ , μετά την πλήρη απορρόφηση και εκπομπή ενός φωτονίου..	0.2
----	--	-----

5b	Να γράψετε τη σχέση, που δίνει τη μέση μεταβολή του μέτρου της ορμής του ατόμου, $\Delta p$ , μετά την πλήρη απορρόφηση και εκπομπή ενός φωτονίου.	0.2
----	--	-----

### 6. Μεταφορά Ενέργειας και Ορμής από τη δέσμη laser κατά μήκος της κατεύθυνσης +x.

Θεωρήστε τώρα ότι, μια δέσμη laser με κυκλική συχνότητα  $\omega'_L$  προσπίπτει στο άτομο κατά μήκος της +x κατεύθυνσης, καθώς το άτομο κινείται κατά μήκος της +x κατεύθυνσης με ταχύτητα  $v$ . Θεωρήστε ότι, η δέσμη laser με κυκλική συχνότητα  $\omega_L$ , όπως φαίνεται από ένα κινούμενο άτομο, είναι σε συντονισμό με τη διέγερση του ατόμου. Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

6a	Γράψετε τη σχέση, για τον υπολογισμό της μέσης μεταβολής της ενέργειας $\Delta \varepsilon$ του ατόμου μετά την πλήρη απορρόφηση και εκπομπή ενός φωτονίου.	0.3
----	---	-----

6b	Γράψετε τη σχέση, για τον υπολογισμό της μέσης μεταβολής της ορμής $\Delta p$ του ατόμου, μετά την πλήρη απορρόφηση και εκπομπή ενός φωτονίου.	0.3
----	--	-----



## ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΣΚΕΛΑΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΜΕΛΑΣΣΩΝ

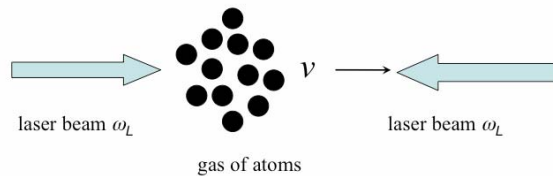
Το γεγονός ότι το άτομο, μπορεί αυθόρμητα να εκπέμπει ένα φωτόνιο σε ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα μετά την απορρόφηση, έχει ως αποτέλεσμα η συνθήκη συντονισμού να μην ικανοποιείται ακριβώς σύμφωνα με τη συζήτηση που έγινε πιο πάνω. Δηλαδή, η κυκλική συχνότητα της δέσμης laser  $\omega_L$  και  $\omega'_L$  μπορεί να έχουν οποιαδήποτε τιμή και η απορρόφηση και εκπομπή φωτονίου μπορεί να λαμβάνουν χώρα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει με διαφορετικές (κβαντικές) πιθανότητες και, όπως αναμένεται, η μέγιστη πιθανότητα βρίσκεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη συντονισμού. Ο χρόνος μεταξύ της απορρόφησης και της εκπομπής ενός φωτονίου ονομάζεται χρόνος ημιζωής και συμβολίζεται με  $\Gamma^{-1}$ .

Θεωρήστε ένα αριθμό ατόμων,  $N$ , σε ηρεμία ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, και μια δέσμη laser κυκλικής συχνότητας  $\omega_L$  η οποία προσπίπτει στα άτομα. Τα άτομα απορροφούν και εκπέμπουν συνεχώς έτσι ώστε υπάρχει ένας μέσος αριθμός ατόμων στη διεγερμένη κατάσταση,  $N_{exc}$ , (και άρα  $N - N_{exc}$  άτομα στη θεμελιώδη κατάσταση). Ισχύει η ακόλουθη σχέση, όπως προκύπτει με βάση την κβαντική θεωρία:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

όπου  $\omega_0$  είναι η κυκλική συχνότητα συντονισμού της διέγερσης και  $\Omega_R$  ονομάζεται συχνότητα Rabi. Ο παράγοντας  $\Omega_R^2$  είναι ανάλογος της έντασης της δέσμης laser. Βλέπετε ότι αυτός ο αριθμός, είναι διάφορος του μηδέν ακόμα και αν η κυκλική συχνότητα συντονισμού  $\omega_0$  διαφέρει από την κυκλική συχνότητα της δέσμης laser  $\omega_L$ . Ένας εναλλακτικός τρόπος να εκφράσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι ότι ο αριθμός των απορροφήσεων και εκπομπών ανά μονάδα χρόνου είναι  $N_{exc}\Gamma$ .

Θεωρήστε τη φυσική διεργασία όπως περιγράφεται στο Σχήμα 2, όπου δύο δέσμες laser με την ίδια αλλά τυχαία συχνότητα  $\omega_L$  προσπίπτουν σε  $N$  άτομα αερίου, τα οποία κινούνται στην κατεύθυνση  $+x$ , με ταχύτητα  $v$



Σχήμα 2. Δύο δέσμες laser με την ίδια αλλά τυχαία συχνότητα  $\omega_L$  προσπίπτουν σε  $N$  άτομα αερίου τα οποία κινούνται με ταχύτητα  $v$  στη  $+x$  κατεύθυνση.

### 7. Δύναμη στη δέσμη ατόμων από τις δέσμες lasers.

7a	Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω πληροφορίες, γράψετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της δύναμης που ασκούν οι δέσμες lasers στη δέσμη των ατόμων. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι: $mv \gg \hbar q$ .	1.5
----	---	-----

### 8. Κατώτατο όριο ταχύτητας.

Υποθέστε τώρα ότι η ταχύτητα των ατόμων είναι αρκετά μικρή, ώστε να μπορείτε να αναπτύξετε την εξίσωση για τη δύναμη μέχρι την πρώτη τάξη μεγέθους για την ταχύτητα  $v$ .

8a	Γράψετε τη σχέση για το μέτρο της δύναμης που βρήκατε στην ερώτηση (7a), σε αυτό το όριο.	1.5
----	---	-----

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτό το αποτέλεσμα, για να βρείτε συνθήκες, για την επιτάχυνση, την επιβράδυνση ή και συνθήκες για καμιά επίδραση στα άτομα, από την εκπομπή των lasers.

8b	Γράψετε τη συνθήκη για να λάβουμε θετική δύναμη (επιταχυνόμενα άτομα).	0.25
----	--	------

8c	Γράψετε τη συνθήκη για να πάρουμε μηδενική τιμή της δύναμης.	0.25
----	--	------

8d	Γράψετε τη συνθήκη για να λάβουμε αρνητική δύναμη (επιβραδυνόμενα άτομα).	0.25
----	---	------

8e	Θεωρήστε τώρα ότι τα άτομα κινούνται με ταχύτητα $-v$ (στη $-x$ κατεύθυνση). Γράψετε τη συνθήκη για να πάρουμε δύναμη που επιβραδύνει τα άτομα.	0.25
----	---	------

### 9. Οπτικές μελάσσες.

Στην περίπτωση αρνητικής δύναμης, μπορεί κάποιος να θεωρήσει δύναμη τριβής που απάγει ενέργεια.

Υποθέστε αρχικές συνθήκες, Τη χρονική στιγμή  $t=0$  τα άτομα του αερίου έχουν ταχύτητα  $v_0$ .

9a	Στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων, προσδιορίστε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ταχύτητας των ατόμων, μετά που οι δέσμες laser προσπίπτουν για χρόνο $\tau$ .	1.5
----	--	-----

9b	Υποθέστε τώρα ότι τα άτομα του αερίου είναι σε θερμική ισορροπία θερμοκρασίας $T_0$ . Προσδιορίστε τη θερμοκρασία $T$ , μετά που οι δέσμες laser προσπίπτουν για χρόνο $\tau$ .	0.5
----	---	-----

Αυτό το μοντέλο, δεν επιτρέπει αυθαίρετες τιμές χαμηλών θερμοκρασιών.