ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

ΛΥΣΗ

DOPPLER LASER ΨΥΞΗ ΚΑΙ ΟΠΤΚΕΣ ΜΕΛΑΣΣΕΣ

Το κλειδί σ' αυτό το πρόβλημα είναι το φαινόμενο Doppler (για την ακρίβεια, το διαμήκες φαινόμενο Doppler): Η κυκλική συχνότητα μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας η οποία ανιχνεύεται από ένα παρατηρητή εξαρτάται τη σχετική του κίνηση ως προς τον εκπομπό, η παρατηρούμενη συχνότητα είναι

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}} \approx \omega\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

όπου v είναι η σχετική ταχύτητα του εκπομπού και του παρατηρητή και ω η κυκλική συχνότητα του εκπομπού. Τα πάνω και κάτω πρόσημα ανταποκρίνονται, αντίστοιχα, στην περίπτωση που πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν ή απομακρύνονται. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για χαμηλές ταχύτητες (μη σχετικιστικό όριο).

Η κυκλική συχνότητα του laser στο εργαστήριο είναι ω_L, ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα μετάβασης του ατόμου; το άτομο κινείται με ταχύτητα v κατά τη διεύθυνση του laser:

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματα θα πρέπει να δοθούν σε ανάπτυγμα πρώτης τάξεως για τα v/c ή $\hbar q/mv$.

ΜΕΡΟΣ Ι: ΒΑΣΙΚΑ ΤΗΣ ΨΥΞΗΣ ΜΕ LASER

1. Απορρόφηση.

1a	Καταγράφουμε τη συνθήκη συντονισμού για την απορρόφηση του φωτονίου. $\omega_0 \approx \omega_L\left(1 + \frac{v}{c}\right)$	0.2

1b	Καταγράφουμε την ορμή p_{at} του ατόμου μετά την απορρόφηση, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου $p_{at} = p - \hbar q \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$	0.2

1c	Καταγράφουμε την ενέργεια ε_{at} του ατόμου μετά την απορρόφηση, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου $\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L$	0.2

2. Αυθόρμητη εκπομπή φωτονίου στην κατεύθυνση –x.

Πρώτα υπολογίζουμε την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για να κρατήσουμε τη σωστή σειρά. Αυτό διότι η ταχύτητα του ατόμου αλλάζει μετά την απορρόφηση, ωστόσο, αυτή είναι διόρθωση δευτέρας τάξεως για την εκπεμπόμενη συχνότητα:

$$\omega_{ph} \approx \omega_0\left(1-\frac{v'}{c}\right) \quad \text{με} \quad v' \approx v - \frac{\hbar q}{m}$$

έτσι,

$$\begin{aligned}\omega_{ph} &\approx \omega_0\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\left(\frac{\hbar q}{mv}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right)\\ &\approx \omega_L\end{aligned}$$

2a	Καταγράφουμε την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου, ε_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $\varepsilon_{ph} \approx \hbar\omega_L$	0.2

2b	Καταγράφουμε την ορμή του εκπεμπόμενου φωτονίου p_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $p_{ph} \approx -\hbar\omega_L / c$	0.2

Από τη διατήρηση της ορμής (δες 1b):

$$p_{at} + p_{ph} \approx p - \hbar q$$

2c	Καταγράφουμε την ορμή του ατόμου p_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $p_{at} \approx p = mv$	0.2

2d	Καταγράφουμε την ενέργεια του ατόμου ε_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $-x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.	0.2

	$\varepsilon_{at} \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$	

3. Αυθόρμητη εκπομπή φωτονίου στην κατεύθυνση +x

Το ίδιο με το προηγούμενο, κρατώντας τη σωστή τάξη.

3a	Καταγράφουμε την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου, ε_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $\varepsilon_{ph} \approx \hbar\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_L\left(1+2\frac{v}{c}\right)$	0.2

3b	Καταγράφουμε την ορμή του εκπεμπόμενου φωτονίου p_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $p_{ph} \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+2\frac{v}{c}\right)$	0.2

3c	Καταγράφουμε την ορμή του ατόμου p_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $p_{at} = p - \hbar q - p_{ph} \approx p - \hbar q - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+2\frac{v}{c}\right) \approx mv - 2\frac{\hbar\omega_L}{c}$	0.2

3d	Καταγράφουμε την ενέργεια του ατόμου ε_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής στην κατεύθυνση $+x$, ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. $\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-2\frac{\hbar q}{mv}\right)$	0.2

1. **4. Μέση Εκπομπή μετά την Απορρόφηση.**

Η διαδικασία αυθόρμητης εκπομπής προκύπτει με ίσες πιθανότητες για τις δύο κατευθύνσεις.

4a	Καταγράφουμε τη μέση ενέργεια ενός εκπεμπόμενου φωτονίου, ε_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής $\bar{\varepsilon}_{ph} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ph}^{+} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ph}^{-} \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$	0.2

4b	Καταγράφουμε τη μέση ορμή ενός εκπεμπόμενου φωτονίου p_{ph}, μετά τη διαδικασία εκπομπής $\bar{p}_{ph} = \frac{1}{2}p_{ph}^{+} + \frac{1}{2}p_{ph}^{-} \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\frac{v}{c} = mv\left(\frac{\hbar q}{mv}\frac{v}{c}\right) \approx 0$ δεύτερη τάξη	0.2

4c	Καταγράφουμε τη μέση ενέργεια του ατόμου ε_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής. $\bar{\varepsilon}_{at} = \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^{+} + \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^{-} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{\hbar q}{mv}\right)$	0.2

4d	Καταγράφουμε τη μέση ορμή του ατόμου p_{at}, μετά τη διαδικασία εκπομπής. $\bar{p}_{at} = \frac{1}{2}p_{at}^{+} + \frac{1}{2}p_{at}^{-} \approx p - \frac{\hbar\omega_L}{c}$	0.2

5. Μεταφορά Ενέργειας και Ορμής.

Υποθέτωντας μια μόνο πλήρη διαδικασία απορρόφησης και εκπομπής ενλός φωτονίου, όπως περιγράφηκε παραπάνω, υπάρχει μια συνολική μέση ορμή και ενέργεια η οποία μεταφέρεται μεταξύ του laser και του ατόμου.

5a	Καταγράφουμε τη μέση ενεργειακή μεταβολή $\Delta\varepsilon$ του ατόμου μετά μια πλήρη διαδικασία απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου. $\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{at}^{after} - \bar{\varepsilon}_{at}^{before} \approx -\frac{1}{2}\hbar q v = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L\frac{v}{c}$	0.2

5b	Καταγράφουμε τη μέση μεταβολή ορμής Δp του ατόμου μετά μια πλήρη διαδικασία απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου. $\Delta p = \bar{p}_{at}^{after} - \bar{p}_{at}^{before} \approx -\hbar q = -\frac{\hbar\omega_L}{c}$	0.2

6. Energy and momentum transfer by a laser beam along the $+x$ direction.

6a	Καταγράφουμε τη μέση ενεργειακή μεταβολή $\Delta\varepsilon$ του ατόμου μετά μια πλήρη διαδικασία απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου. $\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{at}^{after} - \bar{\varepsilon}_{at}^{before} \approx +\frac{1}{2}\hbar q v = +\frac{1}{2}\hbar\omega_L'\frac{v}{c}$	0.3

6b	Καταγράφουμε τη μέση μεταβολή ορμής Δp του ατόμου μετά μια πλήρη διαδικασία απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου. $\Delta p = \bar{p}_{at}^{after} - \bar{p}_{at}^{before} \approx +\hbar q = +\frac{\hbar\omega_L'}{c}$	0.3

ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΜΕΛΑΣΣΩΝ

Δύο δέσμες laser που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις με την ίδια αλλά αυθαίρετη συχνότητα ω_L προσπίπτουν σε δέσμη με N άτομα τα οποία κινούνται στην κατεύθυνση $+x$ με μέση ταχύτητα v.

7. Δύναμη στη δέσμη ατόμων από τις δέσμες lasers.

Κατά μέσο όρο, το κλάσμα των ατόμων που βρίσκονται στη διεγερμένη κατάσταση είναι

$$P_{exc} = \frac{N_{exc}}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

όπου ω_0 η κυκλική συχνότητα συντονισμού των ατόμων και Ω_R η καλούμενη συχνότητα Rabi frequency. Η Ω_R^2 είναι ανάλογη της έντασης της δέσμης laser. Η χρόνος ζωής της διεγερμένης ενεργειακής στάθμης του ατόμου είναι Γ^{-1}.

Η δύναμη υπολογίζεται ως ο αριθμός των κύκλων απορρόφησης-εκπομπής, επί τη μεταφορά ορμής σε κάθε γεγονός (κύκλο), διά τη χρονική διάρκεια του κάθε γεγονότος. ΠΡΟΣΟΧΗ! Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η μετατόπιση Doppler για κάθε laser, όπως αυτή μετριέται από τα άτομα:

7a	Έτσι βρίσκουμε η δύναμη που ασκούν τα lasers στην ατομική δέσμη υποθέτοντας ότι $mv >> \hbar q$. $F = N\Delta p^- P_{exc}^- \Gamma + N\Delta p^+ P_{exc}^+ \Gamma$ $= \left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L + \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L - \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} \right) N\Gamma\hbar q$	1.5

8. Κατώτατο όριο ταχύτητας.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ταχύτητα είναι τόσο μικρή ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε την εξίσωση για τη δύναμη μέχρι την πρώτη τάξη μεγέθους για την ταχύτητα v.

8a	Προκύπτει μια έκφραση για τη δύναμη που βρήκαμε στο ερώτημα (7a), στο όριο αυτό. $F \approx -\frac{4N\hbar q^2 \Omega_R^2 \Gamma}{\left((\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2} (\omega_0 - \omega_L) v$	1.5

8b	Καταγράφουμε τη συνθήκη για την άσκηση μιας θετικής δύναμης (η οποία θα αύξανε την ταχύτητα των ατόμων). $\omega_0 < \omega_L$	0.25

8c	Καταγράφουμε τη συνθήκη για μηδενική δύναμη. $\omega_0 = \omega_L$	0.25

8d	Καταγράφουμε τη συνθήκη για την άσκηση μιας αρνητικής δύναμης (η οποία θα μείωνε την ταχύτητα των ατόμων $\omega_0 > \omega_L$	0.25

8e	Θεωρούμε τώρα ότι τα άτομα κινούνται με ταχύτητα $-v$ (στην κατεύθυνση $-x$). Καταγράφουμε τη συνθήκη για την άσκηση δύναμης η οποία μειώνει την ταχύτητα των ατόμων. $\omega_0 > \omega_L$ … ανεξάρτητη της κατεύθυνσης κίνησης των ατόμων.	0.25

9. Οπτικές μελάσσες

Στην περίπτωση αρνητικής δύναμης, μπορεί κάποιος να θεωρήσει δύναμη τριβής που απάγει ενέργεια.
Υποθέστε αρχικές συνθήκες, Τη χρονική στιγμή $t=0$ τα άτομα του αερίου έχουν ταχύτητα v_0.

9a	Στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων, βρίσκουμε την ταχύτητα των ατόμων μετά που οι δέσμες laser προσπίπτουν για χρόνο τ . $F = -\beta v \Rightarrow m\frac{dv}{dt} \approx -\beta v$ β βρίσκεται από την (8a) $\Rightarrow v = v_0 e^{-\beta t/m}$	1.5

9b	Υποθέτουμε τώρα ότι τα άτομα του αερίου είναι σε θερμική ισορροπία θερμοκρασίας T_0. Προσδιορίσετε τη θερμοκρασία T, μετά που οι δέσμες laser προσπίπτουν για χρόνο τ . Βρίσκουμε τη θερμοκρασία T μετά που οι δέσμες laser προσπίπτουν για χρόνο τ Επειδή $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT$ σε μία διάσταση, και χρησιμοποιώντας την v ως τη μέση θερμική ταχύτητα στην εξίσωση (9a), μπορούμε να γράψουμε $T = T_0 e^{-2\beta t/m}$	0.5