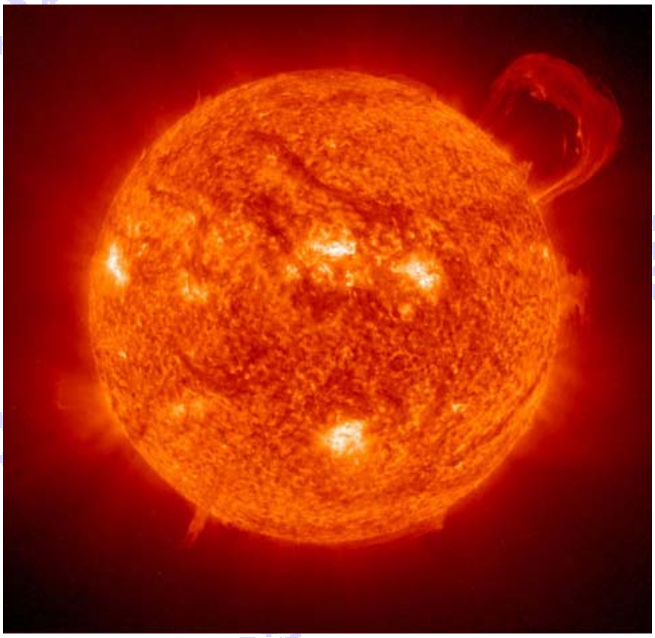
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ No. 3

ΓΙΑΤΙ ΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΕΧΟΥΝ ΜΕΓΑΛΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ?

Οι αστέρες είναι σφαίρες από ζεστό αέριο. Οι περισσότεροι από αυτούς λάμπουν επειδή μετατρέπουν διαμέσου της σύντηξης υδρογόνο σε ήλιο στο εσωτερικό τους. Σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε έννοιες τόσο της κλασσικής μηχανικής όσο και της κβαντικής μηχανικής αλλά και έννοιες της ηλεκτροστατικής και θερμοδυναμικής για να κατανοήσουμε γιατί οι αστέρες πρέπει να είναι μεγάλοι σε μέγεθος για να επιτύχουν αυτή τη διαδικασία της σύντηξης. Επίσης σε αυτό το πρόβλημα θα προσδιορίσουμε τη μάζα και την ακτίνα του μικρότερου αστεριού το οποίο μπορεί να συντήξει υδρογόνο σε ήλιο.



Σχήμα 1. Ο Ήλιος μας, όπως όλα τα αστέρια λάμπει ως αποτέλεσμα θερμοπυρηνικών συντήξεων υδρογόνου σε ήλιο που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό των αστεριών.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Παγκόσμια σταθερά βαρύτητας = $G = 6.7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^2

Σταθερά Boltzmann = $k = 1.4\times10^{-23}$ J K^{-1}

Σταθερά του Planck = $h = 6.6\times10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}

Μάζα πρωτονίου = $m_p = 1.7\times10^{-27}$ kg

Μάζα ηλεκτρονίου = $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg

Ποσότητα φορτίου πρωτονίου και ηλεκτρονίου = $q = 1.6\times10^{-19}$ C

Ηλεκτρική σταθερά (ηλεκτρική διαπερατότητα κενού) = $\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Ακτίνα του Ήλιου = $R_S = 7.0\times10^{8}$ m

Μάζα του Ήλιου = $M_S = 2.0\times10^{30}$ kg

1. Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο κέντρο των αστέρων (Μια πρώτη κλασσική προσέγγιση).

Υποθέστε ότι το αέριο από το οποίο αποτελούνται οι αστέρες είναι καθαρό ιονισμένο υδρογόνο (ηλεκτρόνια και πρωτόνια σε ίσους αριθμούς), και ότι συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο. Με βάση την κλασσική μηχανική, για να ενωθούν δύο πρωτόνια θα πρέπει να βρεθούν σε απόσταση 10^{-15} m ώστε να δράσει η μικρής εμβέλειας ισχυρή πυρηνική δύναμη, η οποία είναι ελκτική. Εντούτοις, για να φέρουμε κοντά δύο πρωτόνια, πρέπει να υπερκεράσουμε την απωστική δύναμη Coulomb. Υποθέστε, στα πλαίσια της κλασσικής μηχανικής, ότι τα δύο πρωτόνια (τα οποία θεωρούνται ως σημειακά) κινούνται αντί-παράλληλα, το καθένα με ταχύτητα v_{rms}, την ενεργό μέση τιμή της ταχύτητας (rms) των πρωτονίων, σε μια μετωπική κρούση σε μια διάσταση.

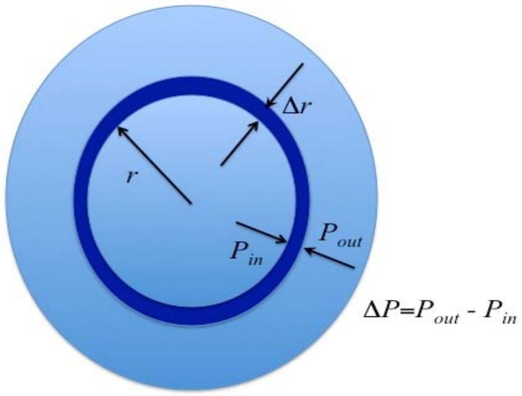
1a	Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του αερίου, T_c, έτσι ώστε η ελάχιστη απόσταση των δύο πρωτονίων που πλησιάζουν, d_c, να γίνει ίση με 10^{-15} m. Να δώσετε αυτή την απάντηση και όλες τις άλλες απαντήσεις αυτού του προβλήματος μέχρι και 2 σημαντικά ψηφία.	1.5

2. Αποδεικνύοντας ότι η τιμή της θερμοκρασίας του ερωτήματος 1a είναι λανθασμένη.

Για να ελέγξουμε κατά πόσο η τιμή της θερμοκρασίας όπως προσδιορίστηκε στο ερώτημα 1a είναι λανθασμένη ή όχι, κάποιος χρειάζεται να υπολογίσει τη θερμοκρασία στο εσωτερικό ενός αστέρα. Η δομή ενός αστεριού είναι αρκετά πολύπλοκη, αλλά μπορούμε να κάνουμε κάποιες προσεγγίσεις και υποθέσεις ώστε να προχωρήσουμε στον πιο πάνω υπολογισμό. Τα αστέρια είναι σε ισορροπία, δηλαδή δεν διαστέλλονται ούτε συστέλλονται, επειδή η εσωτερικές δυνάμεις βαρύτητας εξισορροπούν τις εξωτερικές δυνάμεις της πίεσης. (Βλέπε Σχήμα 2). Η εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας ενός αερίου σε απόσταση r από το κέντρο του, δίνεται από την εξίσωση,

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

όπου P είναι η πίεση του αερίου, G είναι η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας, M_r είναι η μάζα του αερίου (του αστέρα) μέσα στη σφαίρα ακτίνας r, και ρ_r είναι η πυκνότητα του αερίου.



Σχήμα 2. Τα αστέρια είναι σε υδροστατική ισορροπία, με την πίεση να ισορροπεί τη βαρύτητα.

Ένας προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο εσωτερικό ενός αστέρα μπορεί να επιτευχθεί κάνοντας τις ακόλουθες προσεγγίσεις στις τιμές διαφόρων παραμέτρων στο κέντρο και στην επιφάνεια του αστέρα:

$\Delta P \approx P_o - P_c$,

όπου P_c και P_o είναι οι τιμές της πίεσης στο κέντρο και στην επιφάνεια του αστέρα, αντίστοιχα. Εφόσον $P_c >> P_o$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$\Delta P \approx - P_c$.

Μπορούμε να γράψουμε, με βάση την ίδια προσέγγιση,

$\Delta r \approx R$,

όπου R είναι η ακτίνα (συνολική) του αστέρα, και

όπου M είναι η συνολική μάζα του αστέρα.

η πυκνότητα μπορεί να προσεγγιστεί με την τιμή της στο κέντρο,

$\rho_r \approx \rho_c$.

Μπορείτε να υποθέσετε ότι η πίεση είναι αυτή ενός ιδανικού αερίου.

2a	Να προσδιορίσετε την σχέση που δίνει τη θερμοκρασία στο κέντρο του αστέρα, T_c, σε σχέση με την ακτίνα και τη μάζα του αστέρα και σε σχέση με φυσικές σταθερές μόνο.	0.5

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε την ισχύ του μοντέλου:

2b	Χρησιμοποιήστε την εξίσωση που βρήκατε στην ερώτηση (2a) για να εξάγετε τη σχέση του πηλίκου M/R για ένα αστέρα σε σχέση μόνο με φυσικές σταθερές και της θερμοκρασίας T_c.	0.5

2c	Χρησιμοποιήστε την τιμή της θερμοκρασίας T_c που υπολογίσατε στο ερώτημα (1a) και υπολογίστε την τιμή του λόγου M/R για ένα αστέρα.	0.5

2d	Τώρα, υπολογίστε το πηλίκο $M(Sun)/R(Sun)$, και αποδείξτε ότι αυτή η τιμή είναι αρκετά μικρότερη από την τιμή που υπολογίσατε στο ερώτημα (2c).	0.5

3. Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο κέντρο των αστέρων (Κβαντική προσέγγιση).

Η μεγάλη απόκλιση ου υπολογίστηκε στο ερώτημα (2d) δείχνει ότι η κλασσική προσέγγιση για τον υπολογισμό της T_c στο ερώτημα (1a) δεν είναι ορθή. Η λύση σε αυτή την απόκλιση είναι η χρήση της κβαντικής μηχανικής. Η κβαντική μηχανική λέει ότι τα πρωτόνια συμπεριφέρονται ως κύμα με μήκος κύματος λ_p, δηλαδή το μήκος κύματος de Broglie. Αυτό σημαίνει ότι εάν d_c, η ελάχιστη απόσταση στην οποία τα πρωτόνια πλησιάζουν είναι της τάξης του λ_p, τα πρωτόνια λαμβάνοντας υπόψη κβαντικά φαινόμενα μπορούν να υπερκαλυφθούν και να πάθουν σύντηξη.

3a	Υποθέτοντας ότι $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ είναι η συνθήκη η οποία επιτρέπει να γίνει η σύντηξη, για πρωτόνιο με ταχύτητα v_{rms}, προσδιορίστε την εξίσωση που δίνει τη θερμοκρασία T_c σε σχέση με φυσικές σταθερές μόνο.	1.0

3b	Υπολογίστε την τιμή της T_c με βάση τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (3a).	0.5

3c	Χρησιμοποιήστε την τιμή της T_c από το ερώτημα (3b) για να υπολογίστε το πηλίκο M/R για ένα αστέρι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση από το ερώτημα (2b). Δείξετε ότι αυτή η τιμή είναι πολύ κοντά με την τιμή $M(Sun)/R(Sun)$ του ερωτήματος (2d).	0.5

Πραγματικά, αστέρια που χρησιμοποιούν τη σύντηξη του υδρογόνου ακολουθούν κατά μεγάλη ακρίβεια αυτό το λόγο, όπως προέκυψε στο ερώτημα (3c) για ένα μεγάλο εύρος τιμών για τη μάζα.

4. Ο λόγος μάζα/ακτίνα για τους αστέρες.

Η προηγούμενη κβαντική προσέγγιση στο υπολογισμό της θερμοκρασίας στο κέντρο ενός αστέρα, όπως αποδείχτηκε, είναι ορθή.

4a	Χρησιμοποιήστε τα προηγούμενα αποτελέσματα για να δείξετε ότι για κάθε αστέρας το οποίο χρησιμοποιεί τη σύντηξη υδρογόνου, ο λόγος της μάζας M προς την ακτίνα R είναι ο ίδιος και εξαρτάται μόνο από φυσικές σταθερές. Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει το λόγο M/R για αστέρες που χρησιμοποιούν τη σύντηξη υδρογόνου.	0.5

5. Η μάζα και η ακτίνα του μικρότερου αστέρα.

Το αποτέλεσμα του ερωτήματος (4a) εισηγείται ότι ένα αστέρι που χρησιμοποιεί υδρογόνο για τη σύντηξη μπορεί να έχει οποιαδήποτε μάζα, εφόσον ικανοποιείται η πιο πάνω σχέση. Εντούτοις, αυτό δεν είναι ορθό.

Το αέριο σε ένα κανονικό αστέρα που χρησιμοποιεί υδρογόνο για σύντηξη, μπορεί να συμπεριφέρεται κατά προσέγγιση ως ένα ιδανικό αέριο. Αυτό σημαίνει ότι η τυπική απόσταση μεταξύ των ηλεκτρονίων είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερη από το μήκος κύματος d_e, δηλαδή το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie. Όταν η απόσταση γίνει μικρότερη από την τιμή d_e, τα ηλεκτρόνια θα είναι σε μια ασταθή κατάσταση και τα αστέρια θα συμπεριφέρονται διαφορετικά. Σημειώστε τη διαφορά προσέγγισης για ηλεκτρόνια και πρωτόνια στο εσωτερικό ενός αστέρα. Για πρωτόνια, τα αντίστοιχα κύματα de Broglie υπερκαλύπτουν το ένα το άλλο έτσι ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύντηξη. Αντιθέτως, τα αντίστοιχα κύματα de Broglie για τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να υπερκαλυφθούν για να μπορούν να παραμείνουν ως ιδανικό αέριο.

Η πυκνότητα στους αστέρες αυξάνεται με την ελάττωση της ακτίνας. Παρόλα αυτά, για αστέρες αυτής της τάξης μεγέθους έχουν σταθερή πυκνότητα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επιπλέον ότι $m_p >> m_e$.

5a	Να προσδιορίσετε την εξίσωση για το n_e, τη μέση τιμή της πυκνότητας του αριθμού των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό ενός αστέρα.	0.5

5b	Να προσδιορίσετε την εξίσωση για το d_e, την τυπική απόσταση μεταξύ των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό ενός αστέρα.	0.5

5c	Χρησιμοποιήστε τη συνθήκη $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ για να προσδιορίσετε την εξίσωση για την ακτίνα του μικρότερου δυνατού κανονικού αστεριού. Χρησιμοποιήστε τη θερμοκρασία στο εσωτερικό ενός αστέρα όπως βρέθηκε στο ερώτημα 3a. ως μια τυπική θερμοκρασία για όλους τους αστέρες.	1.5

5d	Βρείτε την αριθμητική τιμή της ακτίνας του μικρότερου δυνατού κανονικού αστέρα, σε μέτρα και σε Ηλιακές ακτίνες.	0.5

5e	Να υπολογίσετε την τιμή της μάζας του μικρότερου δυνατού κανονικού αστέρα, τόσο σε kg όσο και σε μονάδες μάζας του Ήλιου.	0.5

6. Σύντηξη πυρήνων ηλίου σε αστέρες μεγάλης ηλικίας.

Καθώς οι αστέρες γερνούν έχουν ήδη συντήξει το περισσότερο υδρογόνο στο εσωτερικό τους σε ήλιο (He), έτσι θα αρχίσουν τη σύντηξη ηλίου σε πιο βαριά στοιχεία ώστε να συνεχίσουν να λάμπουν. Ένας πυρήνα ηλίου αποτελείται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια, ώστε έχει διπλάσιο φορτίο και περίπου τετραπλάσια μάζα από ένα πρωτόνιο. Είδαμε πριν ότι $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ είναι η συνθήκη για τα πρωτόνια να πάθουν σύντηξη.

6a	Να προσδιορίσετε μια αντίστοιχη συνθήκη για τη σύντηξη πυρήνων ηλίου και να υπολογίσετε την τιμή $v_{rms}(He)$, τη μέση ενεργό τιμή, rms, της ταχύτητας για πυρήνες ηλίου και την τιμή της θερμοκρασίας $T(He)$, που απαιτείται για τη σύντηξη πυρήνων ηλίου.	0.5