

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Νο. 3

#### ΛΥΣΕΙΣ

#### ΓΙΑΤΙ ΤΑ ΑΣΤΕΡΙΑ ΕΧΟΥΝ ΜΕΓΑΛΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ;

1. Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο κέντρο των αστεριών (Μια πρώτη κλασική προσέγγιση).

1a	Εξισώνουμε την αρχική κινητική ενέργεια των δύο πρωτονίων με την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια στην ελάχιστη απόσταση (Διατήρηση της ενέργειας)	1.5
	$2\left(\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2\right) = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 d_c} \quad \text{και αφού}$ $\frac{3}{2} k T_c = \frac{1}{2} m_p v_{rms}^2, \text{ we obtain}$ $T_c = \frac{q^2}{12 \pi \epsilon_0 d_c k} = 5.5 \times 10^9 \text{ K}$	

2. Αποδεικνύοντας ότι η τιμή της θερμοκρασίας του ερωτήματος 1a είναι λανθασμένη.

2a	<p>Εφόσον έχουμε ότι</p> $\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2}, \text{ κάνοντας τις δεδομένες υποθέσεις, παίρνουμε ότι:}$ $P_c = \frac{GM \rho_c}{R}. \text{ Τώρα, η πίεση ενός ιδανικού αερίου είναι}$ $P_c = \frac{2 \rho_c k T_c}{m_p}, \text{ όπου } k \text{ είναι η σταθερά Boltzmann, } T_c \text{ είναι η}$ <p>θερμοκρασία στο κέντρο του αστερά, και <math>m_p</math> η μάζα του πρωτονίου. Ο παράγοντας 2 στην προηγούμενη εξίσωση εμφανίζεται επειδή έχουμε δύο σωματίδια (ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο) για κάθε μάζα πρωτονίου και ότι συνεισφέρουν το ίδιο στην πίεση που επικρατεί. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των δύο προηγούμενων εξισώσεων έχουμε ότι:</p> $T_c = \frac{GM m_p}{2kR}$	0.5
----	---	-----

2b	Από την (2a) έχουμε ότι: $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}$	0.5
----	--	-----

2c	Από τη (2b) έχουμε ότι, για $T_c = 5.5 \times 10^9$ K: $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 1.4 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}.$	0.5
----	--	-----

2d	Για τον Ήλιο έχουμε ότι: $\frac{M(\text{Sun})}{R(\text{Sun})} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}$ , που είναι τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερο.	0.5
----	---	-----

**3. Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο κέντρο των αστεριών (Κβαντική προσέγγιση).**

3a	Έχουμε ότι $\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}$ , και αφού $\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p v_{rms}^2$ , και $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 d_c k}$ , παίρνουμε: $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$	1.0
----	---	-----

3b	$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$	0.5
----	---	-----

3c	Από τη (2b) έχουμε ότι, για $T_c = 9.7 \times 10^6$ K: $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}$ ; όσον αφορά τον Ήλιο έχουμε ότι: $\frac{M(\text{Sun})}{R(\text{Sun})} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$	0.5
----	--	-----

4) Ο λόγος μάζα/ακτίνα για τους αστέρες.

4a	<p>Λαμβάνοντας υπόψη πως</p> $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}, \text{ και έτσι}$ $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}, \text{ παίρνουμε:}$ $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$	0.5
----	--	-----

5) Η μάζα και η ακτίνα του μικρότερου αστέρα.

5a	$n_e = \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}$	0.5
----	------------------------------------	-----

5b	$d_e = n_e^{-1/3} = \left( \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p} \right)^{-1/3}$	0.5
----	---	-----

5c	<p>Υποθέτουμε ότι</p> $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}, \text{ αφού}$ $\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{rms}(\text{ηλεκτρόνιο})},$ $\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_e v_{rms}^2(\text{ηλεκτρόνιο}),$ $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2},$ $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}, \text{ και}$ $d_e = \left( \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p} \right)^{-1/3},$ <p>Παίρνουμε ότι</p> $R \geq \frac{\epsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}}$	1.5
----	--	-----

5d	$R \geq \frac{\epsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.10 R(\text{Sun})$	0.5
----	--	-----

5e	<p>Ο λόγος της μάζας προς την ακτίνα είναι:</p> $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12 \pi^2 \epsilon_0^2 G h^2} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}, \text{ από την οποία προκύπτει ότι}$ $M \geq 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.09 M(\text{Sun})$	0.5
----	---	-----

6) Σύντηξη πυρήνων ηλίου σε αστέρες μεγάλης ηλικίας.

6a	<p>Για το Ήλιο έχουμε ότι</p> $\frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\text{He}} v_{\text{rms}}^2(\text{He})} = \frac{h}{2^{1/2} m_{\text{He}} v_{\text{rms}}(\text{He})} \text{ από την οποία παίρνουμε}$ $v_{\text{rms}}(\text{He}) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$ <p>Τώρα χρησιμοποιούμε την:</p> $T(\text{He}) = \frac{v_{\text{rms}}^2(\text{He}) m_{\text{He}}}{3k} = 6.5 \times 10^8 \text{ K}.$ <p>Αυτή η τιμή είναι της τάξεως μεγέθους των εκτιμήσεων για τα αστρικά μοντέλα.</p>	0.5
----	---	-----