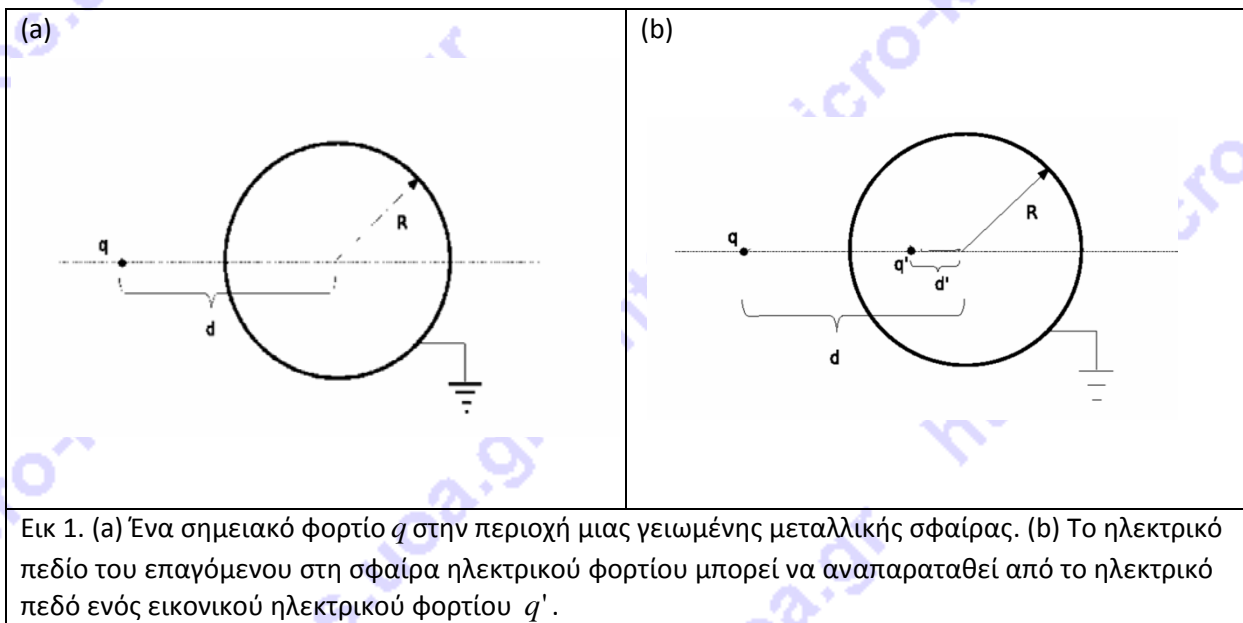


# 1. Το είδωλο ενός φορτίου σε μεταλλικό αντικείμενο

## Εισαγωγή – Μέθοδος των ειδώλων

Ένα σημειακό φορτίο  $q$  τοποθετείται πλησίον ενός γειωμένου μεταλλικού σφαιρικού αγωγού ακτίνας  $R$  [δες Εικ. 1(a)] και έτσι μια επιφανειακή κατανομή φορτίου επάγεται στην σφαίρα. Ο υπολογισμός τού ηλεκτρικού πεδίου και του δυναμικού που οφείλονται σ' αυτή την κατανομή φορτίου είναι αρκετά δύσκολο ζήτημα. Όμως, ο υπολογισμός μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά με τη χρήση της λεγόμενης μεθόδου των ειδώλων. Στη μέθοδο αυτή το ηλεκτρικό πεδίο, ένταση, και το δυναμικό που οφείλονται στην κατανομή φορτίου πάνω στην σφαίρα μπορεί να προκύψει ως το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό τα οποία οφείλονται σε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο  $q'$  τοποθετημένο στο εσωτερικό της σφαίρας. **Σημείωση: Το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό αυτού του εικονικού ηλεκτρικού φορτίου  $q'$  είναι το ίδιο με εκείνο που δημιουργείται από την κατανομή μόνο στο εξωτερικό της σφαίρας (περιλαμβανομένης της επιφάνειάς της).**



## Ζήτημα 1 – Το εικονικό φορτίο

Η συμμετρία του προβλήματος υπαγορεύει ότι το φορτίο  $q'$  θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει το σημειακό φορτίο  $q$  και το κέντρο της σφαίρας [see Εικ. 1(b)].

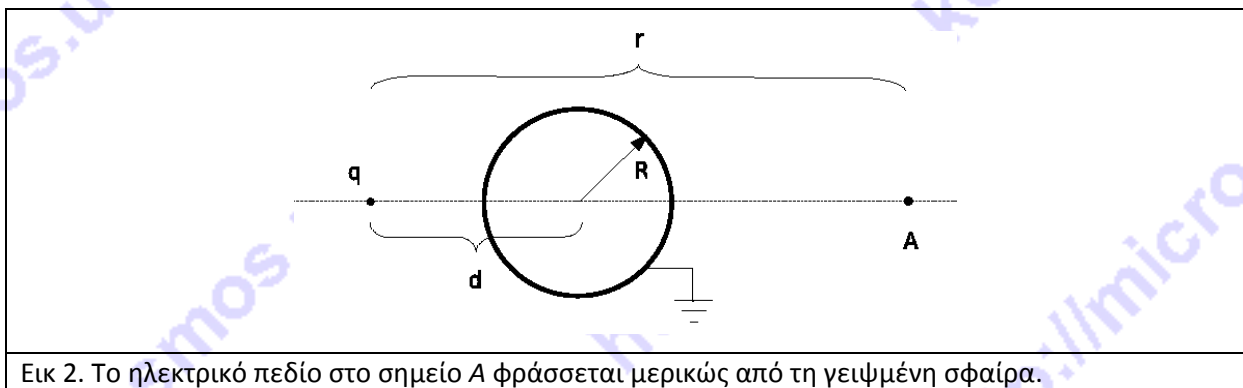
- Ποιά είναι η τιμή του δυναμικού πάνω στη σφαίρα; (0.3 μόρια)
- Εκφράστε το  $q'$  και την απόσταση  $d'$  του φορτίου  $q'$  από το κέντρο της σφαίρας, συναρτήσει των  $q, d,$  και  $R$ . (1.9 μόρια)

- c) Βρείτε το μέτρο της δύναμης η οποία ασκείται στο ηλεκτρικό φορτίο  $q$ . Είναι απωστική; (0.5 μόρια)

### Ζήτημα 2 – Ηλεκτρική Θωράκιση

Θεωρείστε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο  $q$  που βρίσκεται σε απόσταση  $d$  από το κέντρο μεταλλικής γειωμένης σφαίρας με ακτίνα  $R$ . Ενδιαφερόμαστε για το πώς η γειωμένη μεταλλική σφαίρα επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A στην απέναντι πλευρά της σφαίρας (δες Εικ. 2). Το σημείο A βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει το φορτίο  $q$  και το κέντρο της σφαίρας, η απόστασή του από το σημειακό φορτίο  $q$  είναι  $r$ .

- a) Βρείτε το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A. (0.6 μόρια)  
 b) Για πολύ μεγάλη απόσταση  $r \gg d$ , βρείτε την έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας την προσέγγιση  $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$ , όπου  $a \ll 1$  (0.6 μόρια)  
 c) Σε ποιο όριο του  $d$  η μεταλλική σφαίρα θωρακίζει το σημείο A καθιστώντας το ηλεκτρικό πεδίο σ' αυτό ακριβώς μηδέν; (0.3 μόρια)



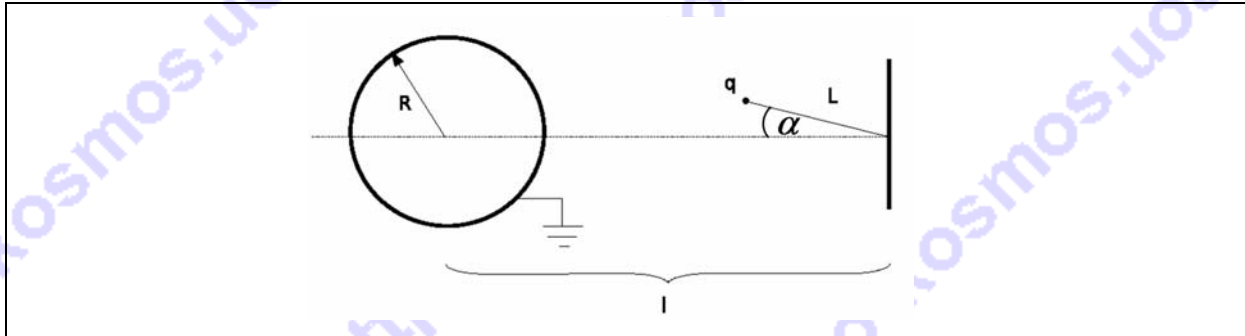
Εικ 2. Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A φράσσεται μερικώς από τη γειωμένη σφαίρα.

### Ζήτημα 3 – Ταλαντώσεις μικρού πλάτους μέσα στο μαγνητικό πεδίο μιας γειωμένης μεταλλικής σφαίρας

Ένα σημειακό φορτίο  $q$  μάζας  $m$  είναι συνδεδεμένο στο άκρο ενός νήματος μήκους  $L$ . Η άλλη άκρη του νήματος είναι συνδεδεμένη σε κατακόρυφο τοίχωμα, στην περιοχή της γειωμένης μεταλλικής σφαίρας. Στους υπολογισμούς σας, αγνοείτε όλες τις ηλεκτροστατικές επιδράσεις από το τοίχωμα. Το σημειακό φορτίο συμπεριφέρεται ως ένα μαθηματικό εκκρεμές (δες Εικ. 3). Το σημείο στο οποίο το νήμα είναι συνδεδεμένο με το τοίχωμα απέχει απόσταση  $l$  από το κέντρο της σφαίρας. Υποθέστε ότι οι βαρυτικές επιδράσεις είναι αμελητέες.

- a) Να προσδιορίσετε το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται στο σημειακό φορτίο  $q$  για συγκεκριμένη γωνία  $\alpha$  και εμφανίστε την κατεύθυνσή της σε ένα καθαρό διάγραμμα (0.8 μόρια).  
 b) Προσδιορίστε τη συνιστώσα αυτής της δύναμης που επιδρά στη διεύθυνση που είναι κάθετη στη διεύθυνση του νήματος συναρτήσει των  $l, L, R, q$  and  $\alpha$ . (0,8 μόρια).

c) Υπολογίστε τη συχνότητα του εκκρεμούς για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. (1,0 μονάδες).



Εικ 3. Ένα σημειακό φορτίο στην περιοχή μιας φορτισμένης μεταλλικής σφαίρας ταλαντώνεται όπως ένα εκκρεμές.

#### Ζήτημα 4 – Η Ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος

Για μια κατανομή ηλεκτρικών φορτίων είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, (δες Εικ. 1a), υπάρχει ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ του σημειακού φορτίου  $q$  και του φορτίου που δημιουργείται από επαγωγή στη σφαίρα. Υπάρχει επίσης ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτίων που εμφανίζονται λόγω επαγωγής στη σφαίρα. Υπολογίστε τις ακόλουθες ηλεκτροστατικές ενέργειες, ως συνάρτηση του φορτίου  $q$ , της ακτίνας της σφαίρας  $R$ , και της απόστασης  $d$ :

- την ηλεκτροστατική ενέργεια λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ του φορτίου  $q$  και των επαγόμενων φορτίων στη σφαίρα. (1.0 μόριο).
- την ηλεκτροστατική ενέργεια λόγω της αλληλεπίδρασης των φορτίων που εμφανίζονται λόγω επαγωγής στη σφαίρα. (1.2 μόρια).
- την ολική ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης του συστήματος. (1.0 μόρια).

**Σημ. :** Υπάρχουν πολλές μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος.

(1) Σε μια από αυτές, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το επόμενο ολοκλήρωμα:

$$\int_d^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) Σε μια άλλη μέθοδο, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι για ένα σύνολο  $N$  φορτία  $q_i$  που βρίσκονται στις θέσεις  $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ , η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι ένα άθροισμα για όλα

τα ζεύγη των φορτίων: 
$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$