1. Ηλεκτρικό μαύρο κουτί: Αισθητήρας μετατόπισης με βάση τη χωρητικότητα

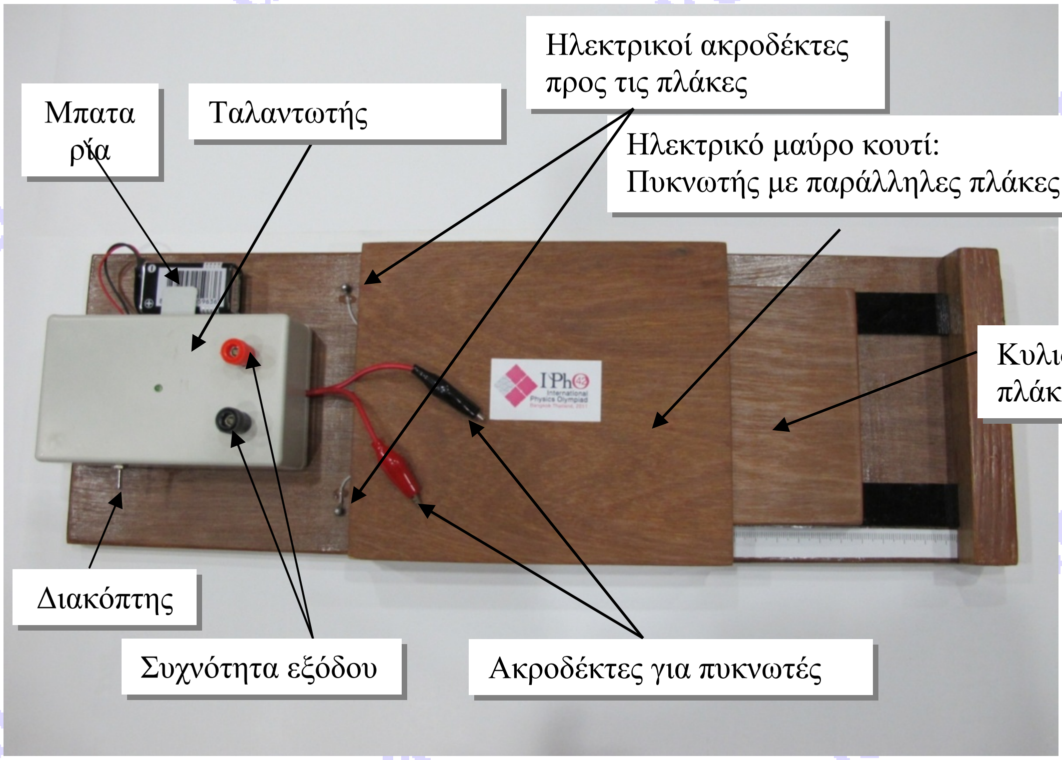
Για ένα πυκνωτή χωρητικότητας C ο οποίος είναι μέρος (εξάρτημα) ενός ταλαντωτή του οποίου η συχνότητα ταλάντωσης είναι f , η σχέση μεταξύ f και C είναι

$$f = \frac{a}{C + C_S}$$

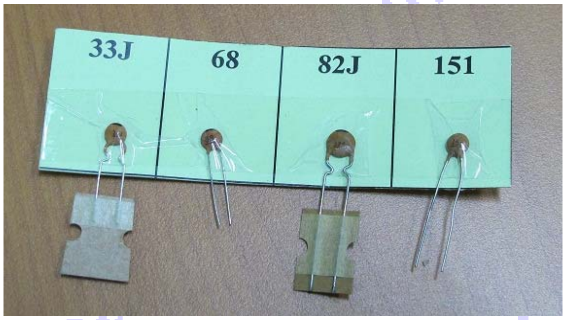
Όπου α είναι μια σταθερά και C_s χωρητικότητα διασποράς του κυκλώματός μας. Η συχνότητα f μπορεί να παρακολουθείται με τη βοήθεια ενός ψηφιακού μετρητή συχνότητας.
Το ηλεκτρικό μαύρο κουτί που σας δίνεται σε αυτό το πείραμα είναι ένας πυκνωτής με παράλληλες πλάκες. Κάθε πλάκα αποτελείται από ένα αριθμό μικρών δοντιών του ίδιου γεωμετρικού σχήματος. Η τιμή του C μπορεί να μεταβάλλεται μετακινώντας οριζόντια την πάνω πλάκα σε σχέση με την κάτω πλάκα. Μεταξύ των δύο πλακών υπάρχει ένα φύλο από διηλεκτρικό υλικό.

Υλικά και Όργανα: ταλαντωτής, ψηφιακό πολύμετρο για μέτρηση της συχνότητας του ταλαντωτή, σετ από πυκνωτές γνωστής χωρητικότητας, ένα ηλεκτρικό μαύρο κουτί και μια μπαταρία.

Προσοχή: Ελέγξτε την τάση της μπαταρίας και ζητήστε καινούρια αν η τάση είναι μικρότερη από 9 V. Μη ξεχάσετε να ανοίξετε τον διακόπτη.



ΕΙΚΟΝΑ 1



ΕΙΚΟΝΑ 2 Πυκνωτές

Η θέση για τις μετρήσεις συχνότητες

ΕΙΚΟΝΑ 3 Ψηφιακό πολύμετρο για τη μέτρηση της συχνότητας

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Ονομαστικές τιμές χωρητικότητας

Κωδικός	Τιμή χωρητικότητας (pF)
33J	34 ± 1
68	68 ± 1
82J	84 ± 1
151	150 ± 1

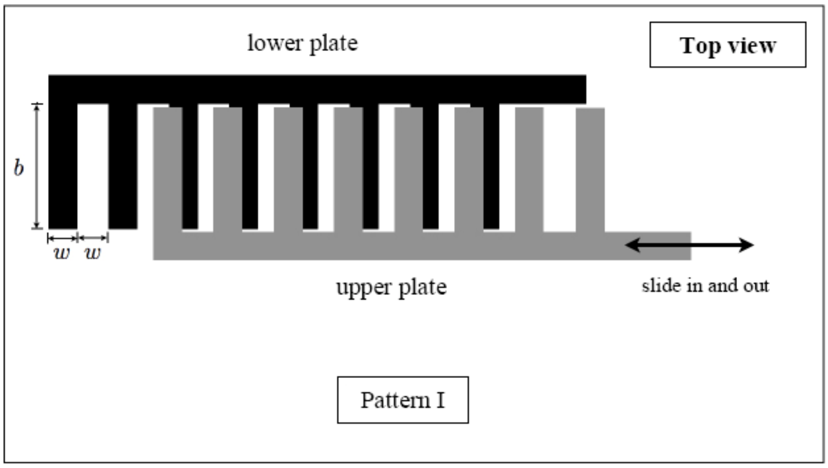
Μέρος 1. Βαθμονόμηση
Να πάρετε μετρήσεις της συχνότητας f για τους πυκνωτές γνωστής χωρητικότητας. Σχεδιάστε κατάλληλη γραφική παράσταση για να υπολογίσετε τις τιμές των α και C_s. Δεν απαιτείται ανάλυση σφαλμάτων.

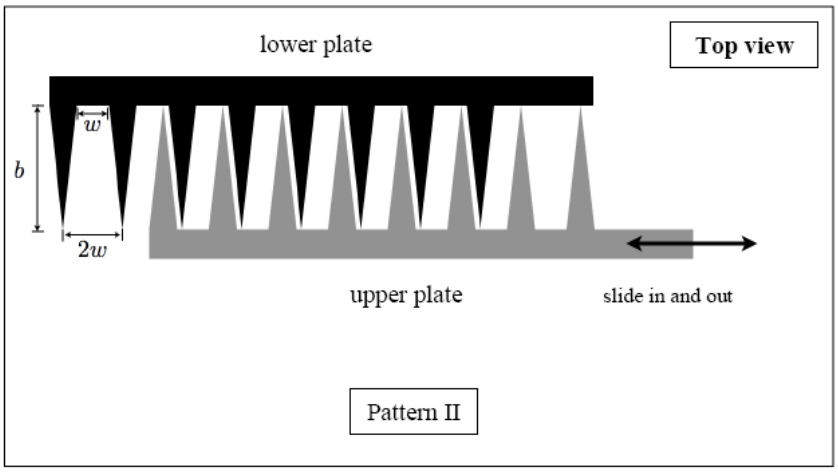
[3.0 points]

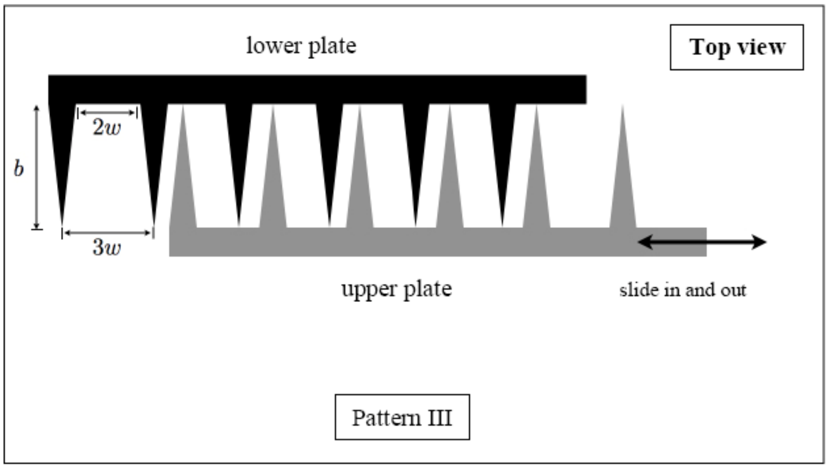
Μέρος 2. Εύρεση της γεωμετρικής μορφής του πυκνωτή με τις παράλληλες πλάκες

[6.0 points]

Δίνονται οι τρείς πιθανές γεωμετρικές μορφές, Μορφή Ι, Μορφή ΙΙ και Μορφή ΙΙΙ όπως ακολούθως:







Για κάθε γεωμετρικό σχήμα, να χαράξετε την αναμενόμενη γραφική παράσταση της χωρητικότητας C σε συνάρτηση της θέσης της πάνω πλάκας σε σχέση με την κάτω πλάκα. Να πάρετε επίσης μετρήσεις της συχνότητας f σε σχέση με τη θέση της πάνω πλάκας ως προς την κάτω πλάκα. Να χαράξετε γραφικές παραστάσεις και από αυτές να προσδιορίσετε το γεωμετρικό σχήμα των πλακών του πυκνωτή όπως και τις διαστάσεις (τιμές των μεγεθών b και w). Η απόσταση (d) μεταξύ των δύο πλακών είναι 0,20 mm. Το φύλλο από διηλεκτρικό υλικό μεταξύ των δύο πλακών έχει διηλεκτρική σταθερά $K = 1,5$. Η διηλεκτρική σταθερά του κενού είναι $\varepsilon_0 = 8,85x10^{-12}\ F.m^{-1}$. Δεν απαιτείται ανάλυση σφαλμάτων.

Μέρος 3. Ανάλυση ψηφιακής βαθμονόμησης
[1.0 point]

Καθώς μεταβάλλεται η σχετική θέση των δύο παράλληλων πλακών του πυκνωτή, η χωρητικότητα μεταβάλλεται με μια περιοδικότητα. Αυτή η διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ψηφιακός μετρητής του μήκους. Όταν ο πυκνωτής παράλληλων πλακών σε αυτό το πείραμα χρησιμοποιείται ως ψηφιακός μετρητής, προσδιορίστε από τα πειραματικά δεδομένα του μέρους 2 την ανάλυσή του, δηλαδή την μικρότερη απόσταση που μπορεί να μετρηθεί για την τιμή της συχνότητας $f \approx 5\ KHz$. Δεν απαιτείται εκτίμηση σφάλματος στην τελική απάντηση.

Part 1. Calibration

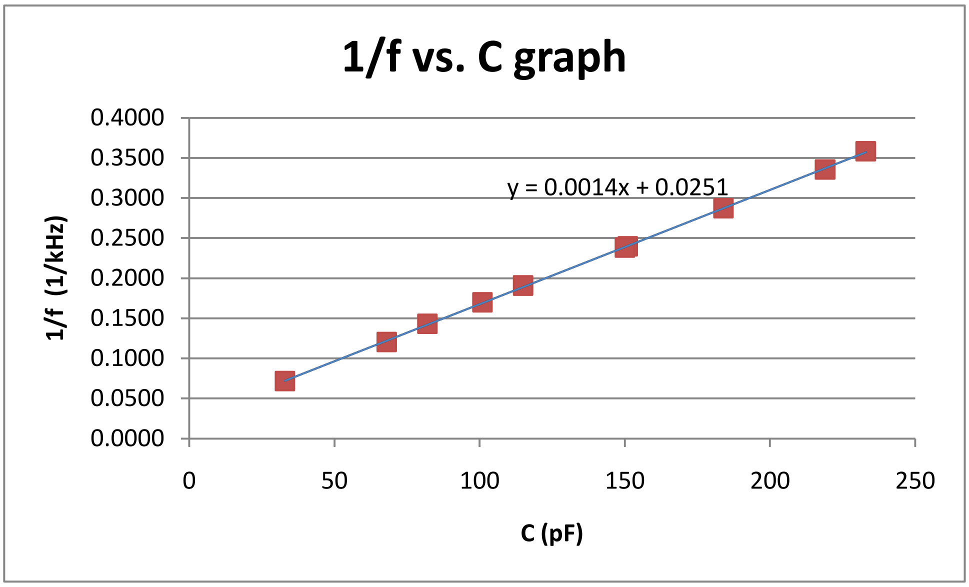
From the relationship between f and C given,

$$f = \frac{\alpha}{C + C_S} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha}C + \frac{C_S}{\alpha}$$

That is, theoretically, the graph of $\frac{1}{f}$ on the Y-axis versus C on the X-axis should be linear of which the slope and the Y-intercept is $\frac{1}{\alpha}$ and $\frac{C_S}{\alpha}$ respectively.

The table below shows the measured values of C (plotted on the X-axis,) f and, additionally, $\frac{1}{f}$, which is plotted on the Y-axis.

C (pF)	f (kHz)	1/f (ms)
33	13.94	0.0717
68	8.30	0.1205
82	6.99	0.1431
151	4.17	0.2398
233	2.79	0.3584
219	2.98	0.3356
184	3.48	0.2874
150	4.20	0.2381
115	5.24	0.1908
101	5.89	0.1698



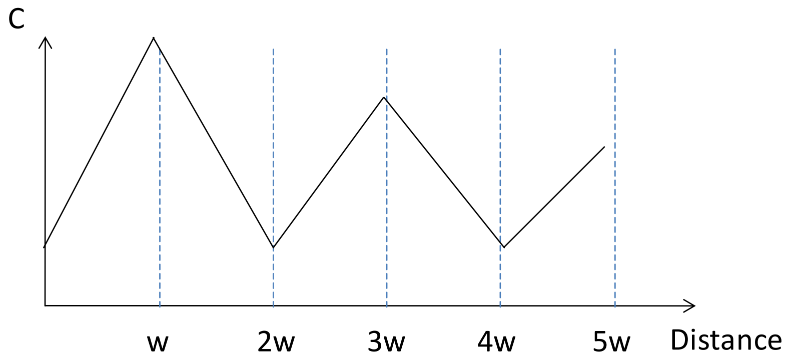
From this graph, the slope ($\frac{1}{\alpha}$) and the Y-intercept ($\frac{C_S}{\alpha}$) is equal to 0.0014 s/nF and 0.0251 ms respectively.

Hence, $$\alpha = \frac{1}{\text{slope}} = \frac{1}{0.0014 \text{ s / nF}} = 714 \text{ nF/s}$$

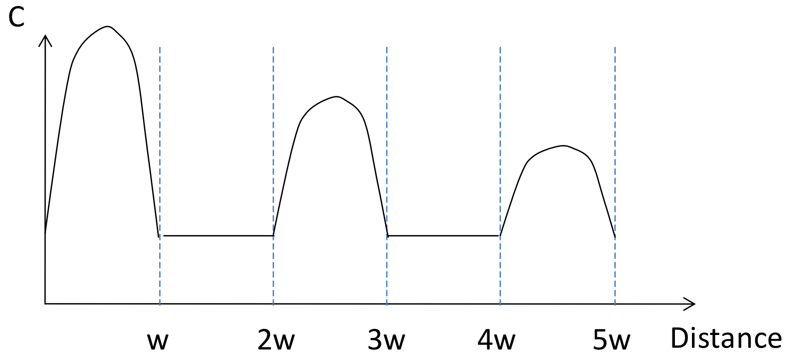
and $$C_S = \frac{\text{Y} - \text{intercept}}{\text{slope}} = \frac{0.0251 \text{ ms}}{0.0014 \text{ s / nF}} = 17.9 \text{ pF} \quad \text{as required.}$$

Part II. Determination of geometrical shape of parallel-plates capacitor

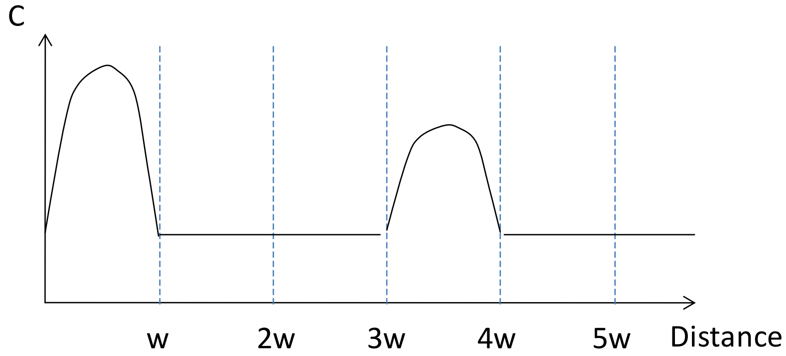
PATTERN I: The expected graph of C versus the position



PATTERN II: The expected graph of C versus the position

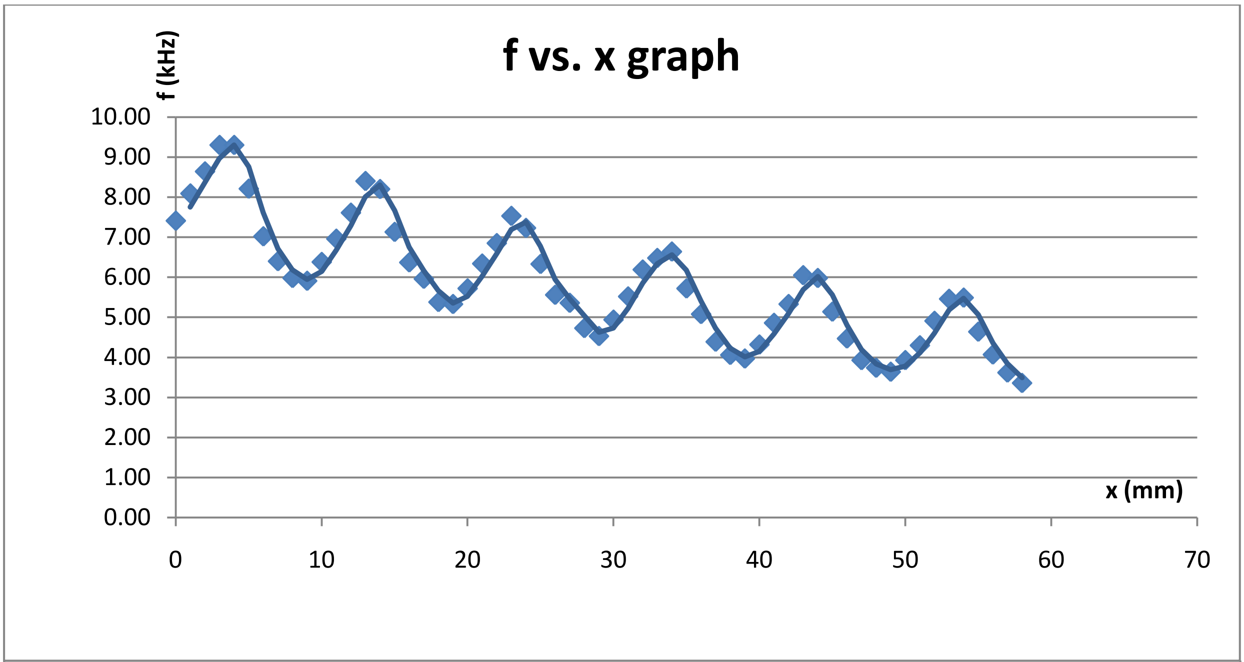


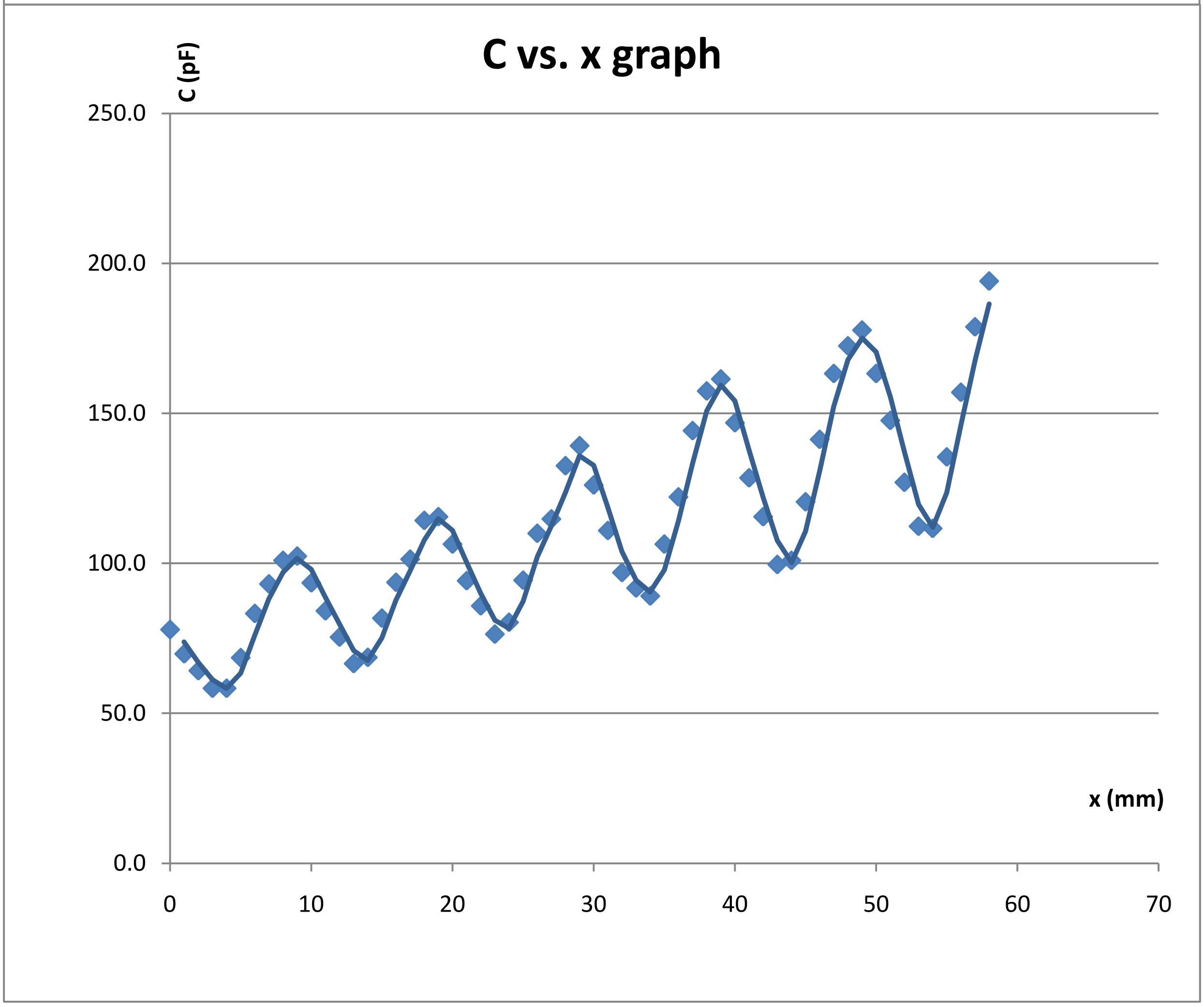
PATTERN III: The expected graph of C versus the position



By measuring f and C versus x (the distance moved between the two plates,) the data and the graphs are shown below.

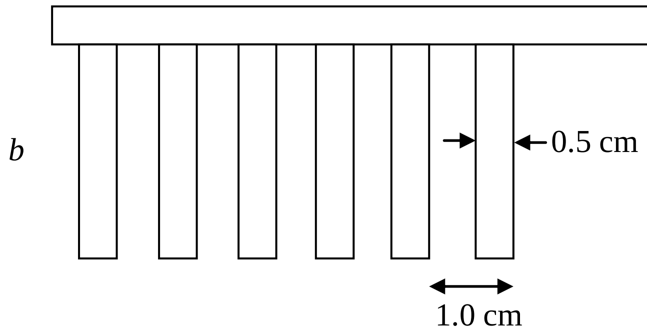
x (mm)	f (kHz)	C (pF)	x (mm)	f (kHz)	C (pF)
0	7.41	77.9	30	4.94	126.1
1	8.09	69.8	31	5.52	110.9
2	8.64	64.2	32	6.19	96.9
3	9.30	58.3	33	6.48	91.7
4	9.30	58.3	34	6.64	89.1
5	8.21	68.5	35	5.72	106.4
6	7.02	83.3	36	5.08	122.1
7	6.40	93.1	37	4.39	144.2
8	5.98	100.9	38	4.06	157.4
9	5.91	102.4	39	3.97	161.4
10	6.38	93.5	40	4.32	146.8
11	6.96	84.1	41	4.86	128.5
12	7.61	75.4	42	5.33	115.5
13	8.40	66.5	43	6.05	99.6
14	8.20	68.6	44	5.98	100.9
15	7.13	81.7	45	5.14	120.5
16	6.37	93.6	46	4.47	141.3
17	5.96	101.3	47	3.93	163.3
18	5.38	114.3	48	3.74	172.5
19	5.33	115.5	49	3.64	177.7
20	5.72	106.4	50	3.93	163.3
21	6.34	94.2	51	4.30	147.6
22	6.85	85.8	52	4.91	127.0
23	7.53	76.4	53	5.46	112.3
24	7.23	80.3	54	5.49	111.6
25	6.33	94.3	55	4.64	135.4
26	5.56	110.0	56	4.07	157.0
27	5.36	114.8	57	3.62	178.8
28	4.73	132.5	58	3.36	194.1
29	4.53	139.2			


f vs. x graph
f (kHz)
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70


C vs. x graph
C (pF)
250.0
200.0
150.0
100.0
50.0
0.0
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70

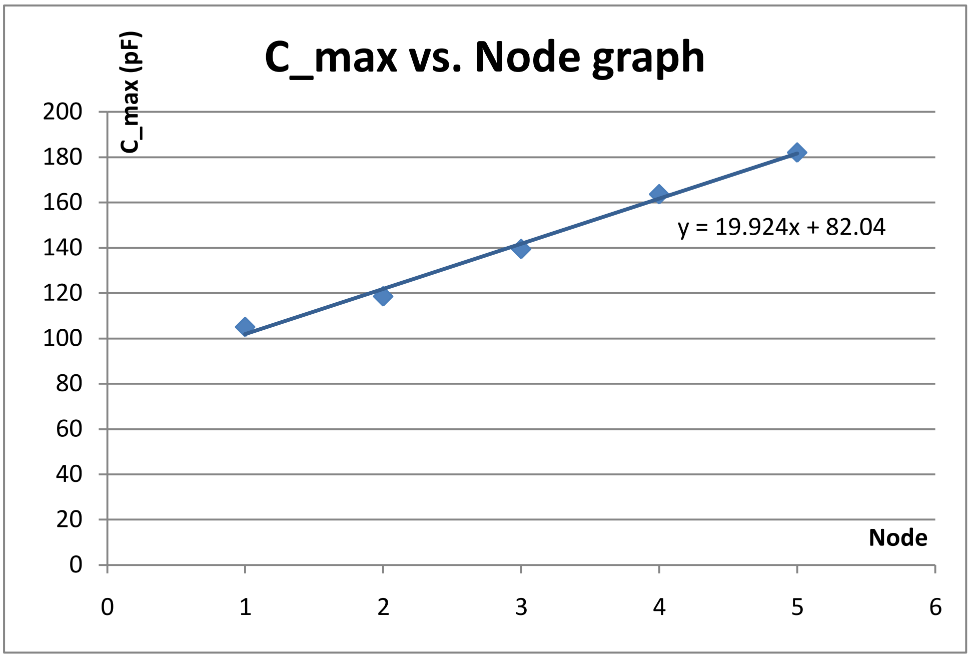
From periodicity of the graph, period = 1.0 cm

Simple possible configuration is:



The peaks of C values obtained from the C vs. x graph are provided in the table below. These maximum C are plotted (on the Y-axis) vs. nodes (on the X-axis.)

node	C_max
1	105.1
2	118.6
3	139.5
4	163.7
5	182.1



This graph is linear of which the slope is the dropped off capacitance $\Delta C = 19.9$ pF/section.

Given that the distance between the plates $d = 0.20$ mm, $K = 1.5$,

$$\Delta C \approx \frac{K\varepsilon_0 A}{d},$$

and $A = 5\times10^{-3}\,\mathrm{m} \times b\,\mathrm{mm} \times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$

Then, $b \text{ mm} \approx \dfrac{\Delta C \ d}{K\varepsilon_0 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}} \approx 60 \text{ mm}$ if medium between plates is the dielectric of which $K = 1.5$.

Part III. Resolution of digital micrometer

From the given relationship between f and C, $f = \dfrac{\alpha}{C + C_S}$,

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq \left|\frac{df}{dC}\right|\Delta C = \left|\frac{-\alpha}{(C+C_S)^2}\right|\Delta C \\ &= \frac{f^2}{\alpha}\Delta C \\ \Leftrightarrow \qquad \Delta C &= \frac{\alpha}{f^2}\Delta f \end{aligned}$$

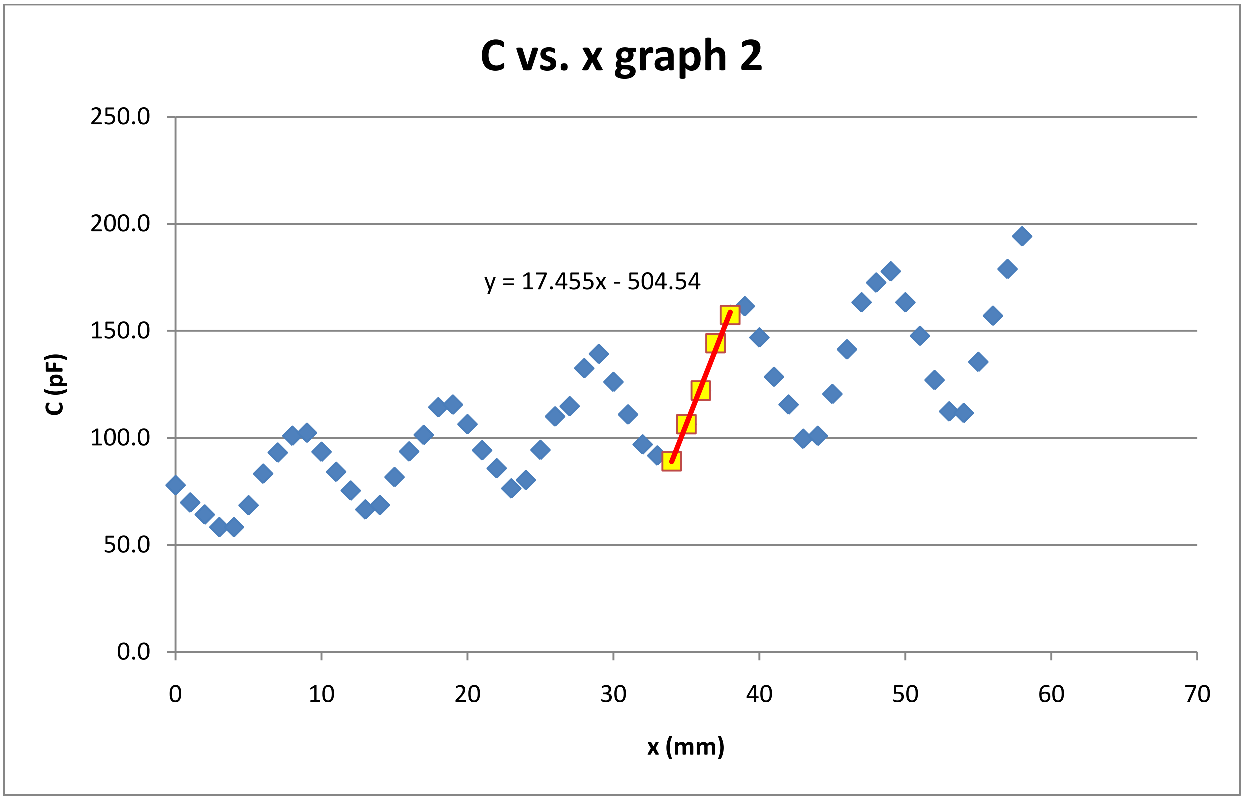
And since C linearly depends on x, $C = mx + \beta \quad \Rightarrow \quad \Delta C = m\Delta x$.

Hence,

$$\Delta x = \frac{\alpha}{mf^2}\Delta f,$$

where Δf is the smallest change of the frequency f which can be detected by the multimeter, x_0 is the operated distance at f = 5 kHz, and m is the gradient of the C vs. x graph at $x = x_0$.

From the f vs. x graph, at f = 5 kHz, The gradient is then measured on the C vs. x graph around this range.



From this graph, $m = 17.5\ \mathrm{pF/mm} = 1.75\times10^{-8}\,\mathrm{F/m}$.
Using this value of m, $f = 5\ \mathrm{kHz}$, $\alpha = 714\ \mathrm{nF/s}$, and $\Delta f = 0.01\ \mathrm{kHz}$,

$$\Delta x = \frac{714\times10^{-9}}{(1.75\times10^{-8})(5\times10^{3})^{2}}\times(0.01\times10^{3}) = 0.016\,\mathrm{mm}$$

NB. The C vs. x graph is used since C (but not f) is linearly related to x.

Alternative method for finding the resolution
(not strictly correct)

Using the f vs. x graph and the data in the table around $f = 5\ \mathrm{kHz}$, it is found that when f is changed by 1 kHz ($\Delta f = 1\ \mathrm{kHz}$,) x is roughly changed by 1.5 mm ($\Delta x \simeq 1.5\ \mathrm{mm}$.) Hence, when f is changed by $\Delta f = 0.01\ \mathrm{kHz}$ (the smallest detectable of the change,) the distance moved is $\Delta x \simeq 0.015\ \mathrm{mm}$.