2. Μηχανικό Μαύρο Κουτί: κύλινδρος με μια μπάλα μέσα σε αυτόν.

Ένα μικρό σωματίδιο μάζας m (μπάλα) βρίσκεται σε σταθερή απόσταση z από το πάνω μέρος ενός κυλίνδρου μεγάλου μήκους μάζας M. Ο κύλινδρος έχει μια σειρά από μικρές τρύπες κατά μήκος του άξονα του. Αυτές οι τρύπες χρησιμεύουν για τη στήριξή του ώστε να κρέμεται κατακόρυφος .

Θα πρέπει να πάρετε τις αναγκαίες πειραματικές μετρήσεις έτσι ώστε να προσδιορίσετε τις αριθμητικές τιμές των πιο κάτω φυσικών μεγεθών μαζί με το αντίστοιχο σφάλμα μέτρησης:

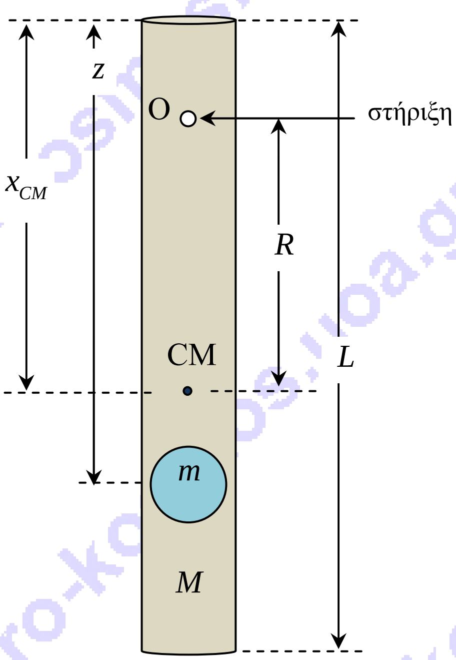
i. Τη θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου μαζί με τη μπάλα.
Επίσης να σχεδιάσετε το σχήμα της διάταξης του απλού πειράματος που κάνατε για τον προσδιορισμό του κέντρου μάζας. **[1.0 points]**

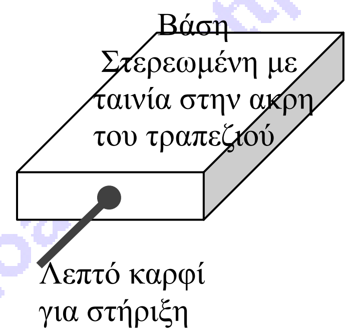
ii. Την απόσταση z. **[3.5 points]**

iii. Τον λόγο $\dfrac{M}{m}$. **[3.5 points]**

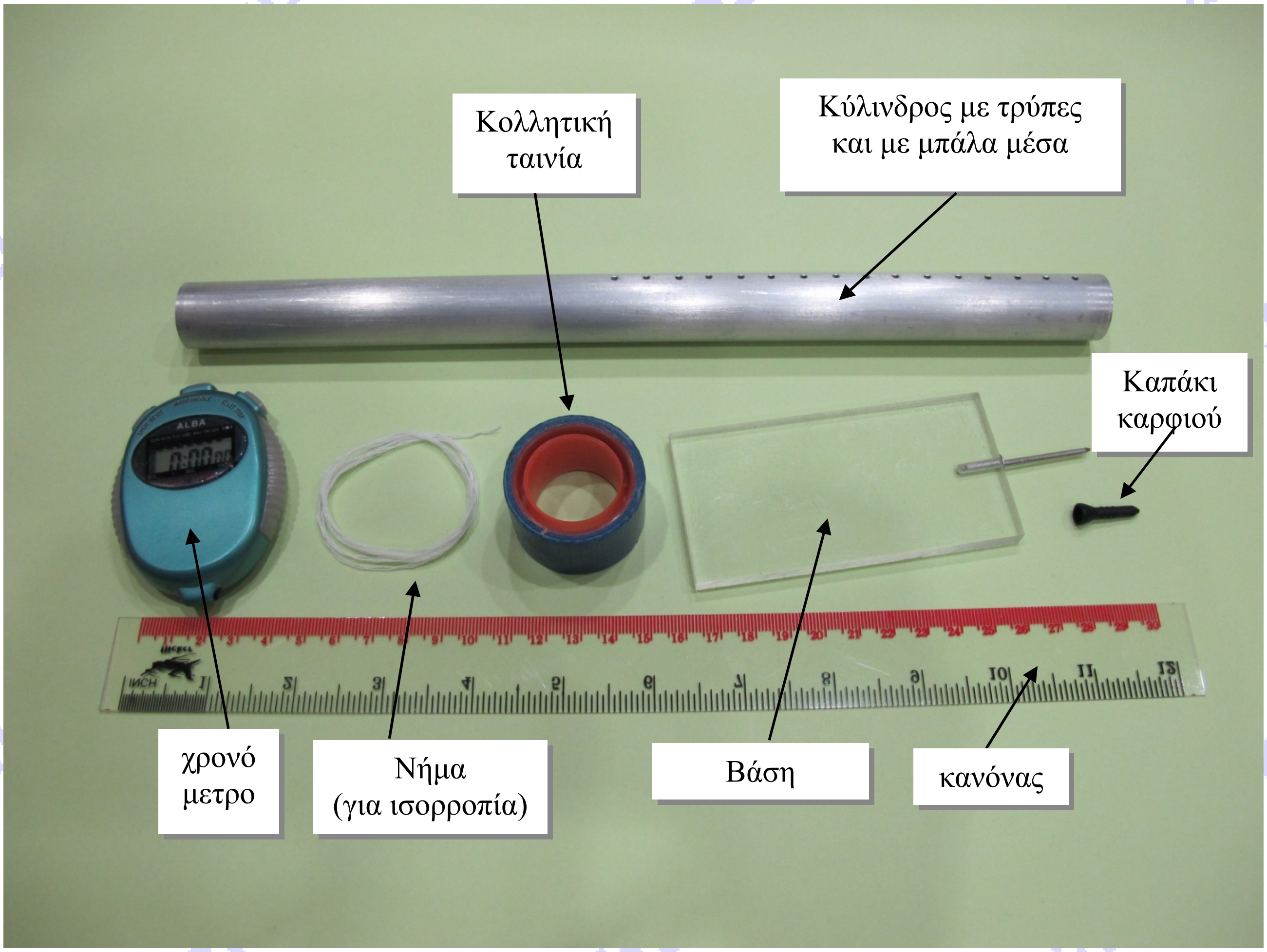
iv. Την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας, g. **[2.0 points]**

Υλικά και Όργανα: Ένας κύλινδρος με τρύπες μαζί με μια μπάλα κολημένη στο εσωτερικό του, μια ορθογώνια βάση μαζί με ένα λεπτό καρφί, πλαστικό καπάκι σε σχήμα καρφιού, χάρακας, χρονόμετρο, νήμα, μολύβι και κολλητική ταινία.





x_{CM} η απόσταση από το πάνω άκρο του κυλίνδρου μέχρι το κέντρο μάζας.
R η απόσταση από το σημείο στήριξης μέχρι το κέντρο μάζας.

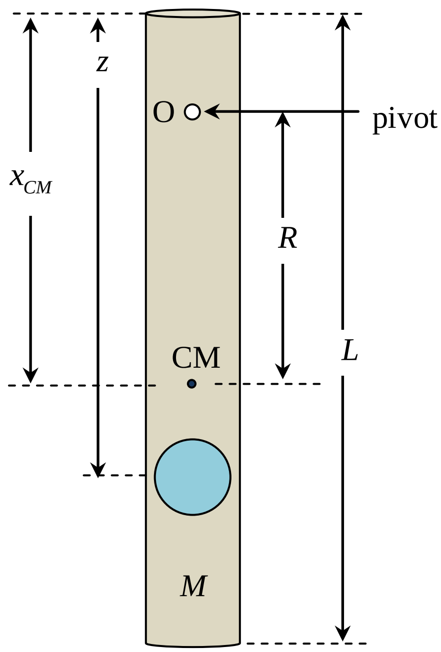


Προσοχή: Το λεπτό καρφί είναι πολύ αιχμηρό. Όταν δεν χρησιμοποιείται, θα πρέπει να προστατεύεται με το πλαστικό καπάκι.

Χρήσιμες πληροφορίες:

1. Για ένα τέτοιο φυσικό εκκρεμές, $\left\{(M+m)R^2 + I_{CM}\right\}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \approx -g(M+m)R\theta$, όπου I_{CM} είναι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με τη μπάλλα ως προς το κέντρο μάζας και θ είναι η γωνιακή μετατόπιση.
2. Για κύλινδρο μεγάλου μήκους L και μάζας M, η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου και είναι κάθετος σ' αυτόν κατά προσέγγιση είναι $\frac{1}{3}M(\frac{L}{2})^2$.
3. Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων: $I = I_{\text{centre of mass}} + \mathsf{M}x^2$, όπου x είναι η απόσταση του σημείου περιστροφής από το κέντρο μάζας του συστήματος, και M η συνολική μάζα του συστήματος.
4. Η μπάλλα μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο που βρίσκεται στον κεντρικό άξονα του κυλίνδρου.
5. Υποθέστε ότι ο κύλινδρος είναι ομογενής και η μάζα των καλυμάτων στα άκρα του είναι αμελητέα.

Solution: 2 . Mechanical Blackbox: a cylinder with a ball inside



In order to be able to calculate the required values in i, ii, iii, we need to know:

a. the position of the centre of mass of the tubing plus particle (object) which depends on z, m, M
b. the moment of inertia of the above.

The position of the CM may be found by balancing. The I_{CM} can be calculated from the period of oscillation of the tubing plus object.

Analytical steps to select parameters for plotting

I. $$x_{CM} = \frac{mz + M\frac{L}{2}}{m+M} \qquad \text{......................... (1)}$$

L is readily obtainable with a ruler.

x_{CM} is determined by balancing the tubing and object.

II. For small-amplitude oscillation about any point O the period T is given by considering the equation:

$$\left\{(M+m)R^2 + I_{CM}\right\}\ddot{\theta} = -g(M+m)R\sin\theta \approx -g(M+m)R\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM}+(M+m)R^2}{g(M+m)R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

where
$$I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM}-\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(z-x_{CM}\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}ML^2 + Mx_{CM}^2 - MLx_{CM} + m\left(z-x_{CM}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Note that

$$T^2\frac{g(M+m)}{4\pi^2} = \frac{I_{CM}}{R} + (M+m)R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Method (a): (linear graph method)

The equation (5) may be put in the form:

$$T^2R = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)R^2 + \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Hence the plot of T^2R v.s. R^2 will yield the straight line whose

Slope $\alpha = \dfrac{4\pi^2}{g}$ .... (7)

and y-intercept $\beta = \dfrac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g}$ .... (8)

Hence, $I_{CM} = (M+m)\dfrac{\beta}{\alpha}$ .... (9)

The value of g is from equation (7): $g = \dfrac{4\pi^2}{\alpha}$ .... (10)

Method (b): minimum point curve method

The equation (5) implies that T has a minimum value at

$$R = R_{\min} \equiv \sqrt{\frac{I_{CM}}{M+m}} \qquad \text{……………………. (11)}$$

Hence $R_{\min}$ can be obtained from the graph T v.s. R.

And therefore $$I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2 \qquad \text{……………………. (12)}$$

This equation (12) together with equation (1) will allow us to calculate the required values z and $\frac{M}{m}$.

At the value $R = R_{\min}$ equation (5) becomes $T_{\min}^2 \frac{g(M+m)}{4\pi^2} = (M+m)R_{\min} + (M+m)R_{\min}$

$$g = \frac{2R_{\min}}{T_{\min}^2} \times 4\pi^2 = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2} \qquad \text{……………………. (13)}$$

from which g can be calculated.

Results

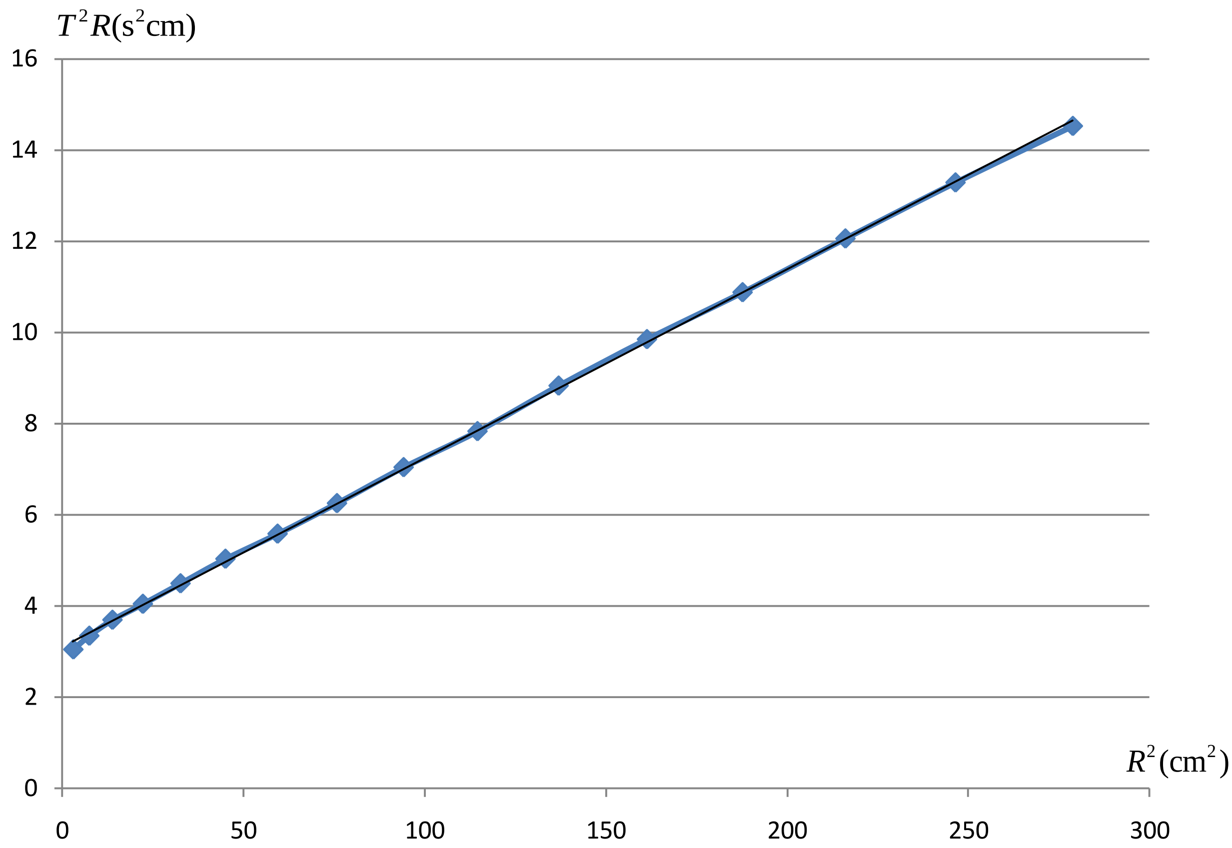
$$L = 30.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$x_{CM} = 17.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \text{ (from top)}$$

$x_{CM} - R$ (cm)	time (s) for 20 cycles			T (s)	R (cm)	R^2 (cm^2)	T^2R (s^{2}cm)
1.1	18.59	18.78	18.59	0.933	16.7	278.9	14.53
2.1	18.44	18.25	18.53	0.920	15.7	246.5	13.29
3.1	18.10	18.09	18.15	0.906	14.7	216.1	12.06
4.1	17.88	17.78	17.81	0.891	13.7	187.7	10.88
5.1	17.69	17.50	17.65	0.881	12.7	161.3	9.85
6.1	17.47	17.38	17.28	0.869	11.7	136.9	8.83
7.1	17.06	17.06	17.22	0.856	10.7	114.5	7.83
8.1	17.06	17.00	17.06	0.852	9.7	94.1	7.04
9.1	16.97	16.91	16.96	0.847	8.7	75.7	6.25
10.1	17.00	17.03	17.06	0.852	7.7	59.3	5.58
11.1	17.22	17.37	17.38	0.866	6.7	44.9	5.03
12.1	17.78	17.72	17.75	0.888	5.7	32.5	4.49
13.1	18.57	18.59	18.47	0.927	4.7	22.1	4.04
14.1	19.78	19.90	19.75	0.991	3.7	13.7	3.69
15.1	11.16	11.13	11.13	1.114	2.7	7.3	3.34
16.1	13.25	13.40	13.50	1.338	1.7	2.9	3.04

Notes: at $x_{CM} - R = 15.1, 16.1$ cm, times for 10 cycles.

Method (a)



Calculation from straight line graph: slope $\alpha = 0.04108 \pm 0.0007$ s^2/cm, y-intercept $\beta = 3.10 \pm 0.05$ s^{2}cm

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \text{ giving } g = (961 \pm 20) \text{ cm/s}^2$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46 \text{ cm}^2 \ \left(\pm 2.5\,\text{cm}^2\right)$$

$$I_{CM} = \left(M+m\right)\frac{\beta}{\alpha} = \left(75.46\right)\left(M+m\right)$$

From equation (4): $I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m\left(z - x_{CM}\right)^2$

Then $(75.46)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2$

$$-7.38\frac{M}{m} + 75.46 = (z-17.8)^2 \qquad \text{……………………. (14)}$$

The centre of mass position gives:

$$17.8(M+m) = 15.0M + mz$$

$$\frac{M}{m} = \frac{z-17.8}{2.8} \qquad \text{……………………. (15)}$$

From equations (14) and (15):

$$-\frac{7.38}{2.8}(z-17.8) + 75.46 = (z-17.8)^2$$

$$(z-17.8) = 7.47$$

And $z = 25.27 = 25.3 \pm 0.1$ cm

$$\frac{M}{m} = 2.68 = 2.7$$

Error Estimation

Find error for g:

From (10), $g = \dfrac{4\pi^2}{\alpha}$

$$\Delta g = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} g = 16.3\,\text{cm/s}^2 \approx 20\,\text{cm/s}^2$$

i) Find error for z:

First, find error for $r = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{3.10}{0.04108} = 75.46\ \text{cm}^2$.

$$\Delta r = \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) r = 2.5\,\text{cm}^2$$

Since error from r contributes most ($\dfrac{\Delta r}{r} \sim 0.03$ while $\dfrac{\Delta L}{L}, \dfrac{\Delta x_{cm}}{x_{cm}} \sim 0.005$), we estimate error propagation from r only to simplify the analysis by substituting the min and max values into equation (4).

Now, we use $r_{\max} = r + \Delta r = 75.46 + 2.5 = 77.96$. The corresponding quadratic equation is $(z-17.8)^2 + 1.743(z-17.8) - 77.96 = 0$ The corresponding solution is $(z-17.8)_{\max} = 7.55$ cm

If we use $r_{\min} = r - \Delta r = 75.46 - 2.5 = 72.96$, the corresponding quadratic equation is

$$(z-17.8)^2 + 3.529(z-17.8) - 72.96 = 0$$

The corresponding solution is $(z-17.8)_{\min} = 6.96$ cm

So $\Delta(z-17.8) = \dfrac{7.55-6.96}{2} = 0.3$ cm

Note that $\dfrac{\Delta(z-17.8)}{z-17.8} \sim 0.04$. So, we still ignore the error propagation due to $\Delta L, \Delta x_{cm}$

The error Δz can be estimated from $\Delta z \approx \Delta(z-17.8) = 0.3$ cm

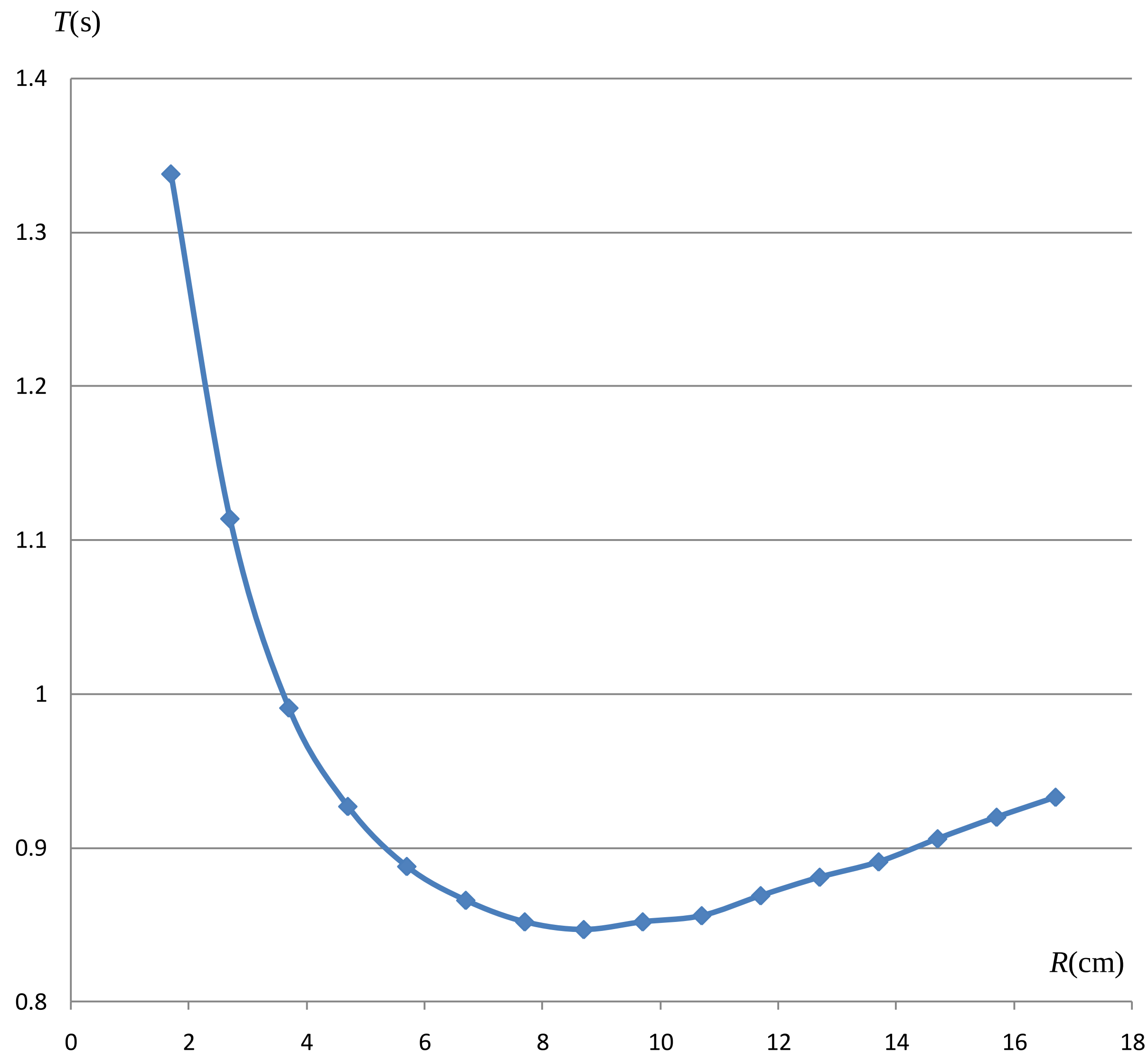
ii) Find error for $\dfrac{M}{m}$:

We know that $\dfrac{M}{m} = \dfrac{z-17.8}{2.8}$

$$\Delta\left(\frac{M}{m}\right) = \frac{\Delta(z-17.8)}{2.8} = 0.11$$

Method (b)

Calculation from T-R plot:



Using the minimum position: $T = T_{\min}$ at $I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2$ and $g = \dfrac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$

From graph: $R_{\min} = 8.9 \pm 0.2$ cm and $T_{\min} = 0.846 \pm 0.005$ s

$$\therefore \quad g = 982 \pm 40 \text{ cm/s}^2$$

$$I_{CM} = (M+m)(8.9)^2 = (79.21)(M+m) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

From equations (14), (15), (16):

$$(79.21)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2$$

$$-3.63M + 79.21m = m(z-17.8)^2$$

$$(x-17.8)^2 + \frac{3.63}{2.8}(x-17.8) - 79.21 = 0$$

$$(z-17.8) = 8.28$$

And $z = 26.08 = 26.1 \pm 0.7$ cm

$$\frac{M}{m} = 2.95 = 3.0 \pm 0.3$$

Error estimation

i) Find error for g:

Using the minimum position: $g = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$, we have

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta R_{\min}}{R_{\min}} + 2\frac{\Delta T_{\min}}{T_{\min}}\right) g = 34 \approx 30 \text{ cm/s}^2$$

ii) Find error for z:

First, find error for $r = R_{\min}^2 = 79.21 \text{ cm}^2$.

$$\Delta r = 2R_{\min}\Delta R_{\min} = 3.56 \text{ cm}^2$$

This r is equivalent to r in part 1. So, one can follow the same error analysis.
As a result, we have

$$z = 26.08 \approx 26.1 \text{ cm}$$
$$\Delta z = 0.8 \text{ cm}$$

i) Find error for $\frac{M}{m}$:

Following the same analysis as in part I, we found that

$$\frac{M}{m} = 2.96;\ \Delta\left(\frac{M}{m}\right) = 0.15$$

NOTE: This minimum curve method is not as accurate as the usual straight line graph.