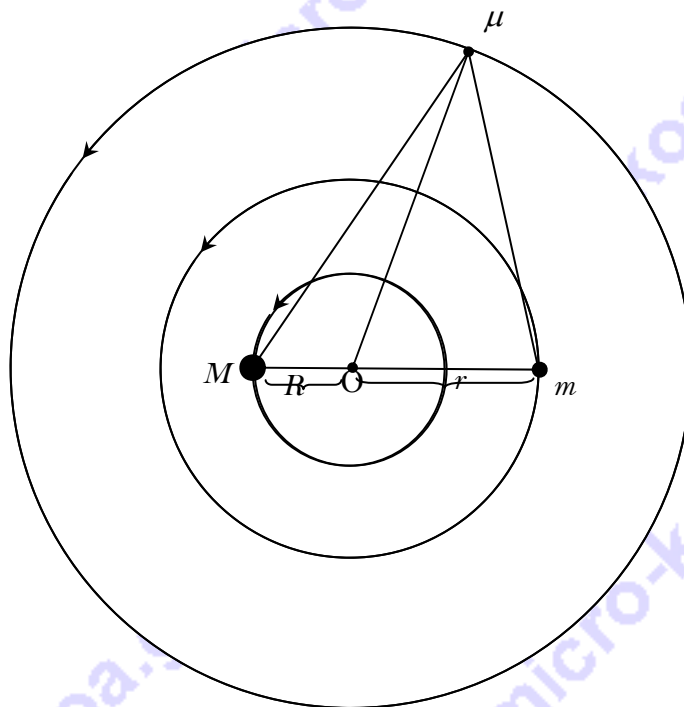


1. Ένα πρόβλημα τριών σωμάτων και το LISA



EIKONA 1 Ομοεπίπεδες τροχιές των τριών σωμάτων

1.1 Δύο μάζες M και m κινούνται σε κυκλικές τροχιές με ακτίνες R και r , αντίστοιχα, γύρω από το κέντρο μάζας τους. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω_0 της ευθείας που ενώνει την M και την m σε όρους των R, r, M, m και της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης G .

[1.5 μόρια]

1.2 Ένα τρίτο σώμα αμελητέας μάζας μ τοποθετείται σε ομοεπίπεδη κυκλική τροχιά γύρω από το ίδιο κέντρο μάζας έτσι ώστε η μάζα μ να παραμένει συνεχώς σταθερή σε σχέση και με την M και με την m όπως φαίνεται στην εικόνα 1. Βρείτε τις τιμές των ακόλουθων παραμέτρων σε σχέση με τα R και r .

[3.5 μόρια]

1.2.1 απόσταση μεταξύ μ και M .

1.2.2 απόσταση μεταξύ μ και m .

1.2.3 απόσταση μεταξύ μ και του κέντρου μάζας

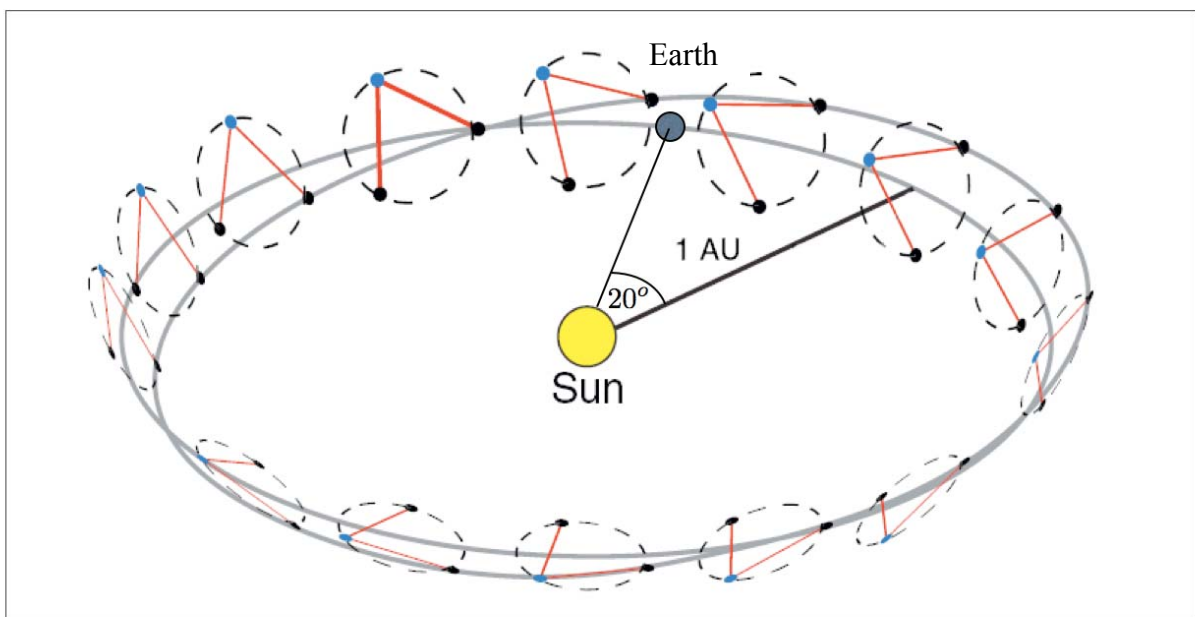
1.3 Θεωρήστε την περίπτωση όπου $M=m$. Αν η μ υποστεί μια μικρή ακτινική μετατόπιση (κατά μήκος του άξονα $O\mu$), ποια είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης της μ γύρω από τη θέση της πριν τη μετατόπιση σε σχέση με την ω_0 ; Υποθέστε ότι η στροφορμή της μ διατηρείται.

[3.2 μόρια]

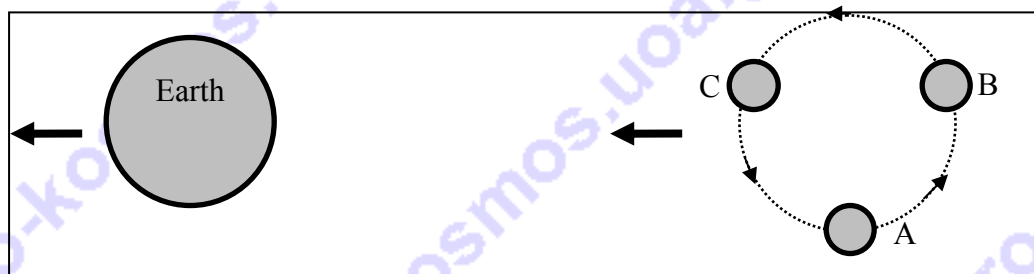
Η LISA (Laser Interferometry Space Antenna) είναι ένα σύνολο από τρία ίδια διαστημικά σκάφη με σκοπό την ανίχνευση χαμηλής συχνότητας βαρυτικών κυμάτων. Καθένα από τα σκάφη είναι

τοποθετημένο στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου όπως φαίνεται στην εικόνα 2 και στην εικόνα 3. Οι πλευρές είναι γύρω στα 5.0 εκατομμύρια χιλιόμετρα. Το σύστημα LISA είναι σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο όπως η Γή ακολουθώντας την ώστε οι επιβατικές ακτίνες τους να σχηματίζουν συνεχώς γωνία 20° . Το σύστημα και η Γή περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο ακολουθώντας ανεξάρτητες ελαφρώς επικλινείς τροχιές γύρω από τον Ήλιο. Τελικά, τα τρία σκάφη εκτελούν μια πλήρη περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας τους σε κάθε έτος.

Αυτά συνεχώς εκπέμπουν και λαμβάνουν σήματα με laser μεταξύ τους. Γενικά, ανιχνεύουν τα βαρυτικά κύματα μετρώντας μικρές αλλαγές στο μήκος των πλευρών του τριγώνου. Μια κρούση αντικειμένων με μεγάλη μάζα, όπως οι μαύρες τρύπες σε γαλαξίες είναι ένα παράδειγμα πηγής βαρυτικών κυμάτων.



ΕΙΚΟΝΑ 2: Η τροχιά του LISA. Τα τρία σκάφη περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας με περίοδο 1 έτος. Ακολουθεί τη Γή κατά γωνία 20° . (Picture from D.A. Shaddock, "An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna", *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, pp.128-132.).

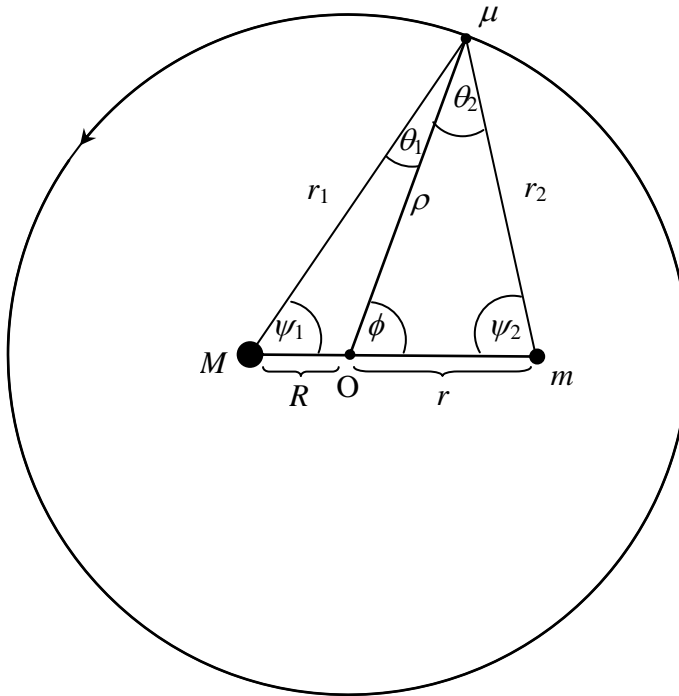


ΕΙΚΟΝΑ 3 Τα τρία σκάφη σε μεγένθυση ακολουθώντας τη Γή. A, B and C είναι τα σκάφη στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

1.4 Στο επίπεδο που περιέχει τα τρία σκάφη, ποια είναι η σχετική ταχύτητα του ενός σκάφους όπως παρατηρείται από το άλλο;

[1.8 μόρια]

I. Solution



1.1 Let O be their centre of mass. Hence

$$MR - mr = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{(R+r)^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

From Eq. (2), or using reduced mass, $\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3}$

Hence, $\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} = \frac{GM}{r(R+r)^2} = \frac{Gm}{R(R+r)^2} \quad \dots\dots\dots (3)$

1.2 Since μ is infinitesimal, it has no gravitational influences on the motion of neither M nor m . For μ to remain stationary relative to both M and m we must have:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu \omega_0^2 \rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3} \rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2} \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Substituting $\frac{GM}{r_1^2}$ from Eq. (5) into Eq. (4), and using the identity

$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, we get

$$m \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{r_2^2} = \frac{(M+m)}{(R+r)^3} \rho \sin \theta_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

The distances r_2 and ρ , the angles θ_1 and θ_2 are related by two Sine Rule equations

$$\frac{\sin \psi_1}{\rho} = \frac{\sin \theta_1}{R} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\sin \psi_1}{r_2} = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R+r}$$

Substitute (7) into (6)

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{R}{(R+r)^4} \frac{(M+m)}{m} \quad \dots\dots\dots (10)$$

Since $\frac{m}{M+m} = \frac{R}{R+r}$, Eq. (10) gives

$$r_2 = R+r \quad \dots\dots\dots (11)$$

By substituting $\frac{Gm}{r_2^2}$ from Eq. (5) into Eq. (4), and repeat a similar procedure, we get

$$r_1 = R+r \quad \dots\dots\dots (12)$$

Alternatively,

$$\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin \theta_1} \quad \text{and} \quad \frac{r_2}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \theta_2}$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{R}{r} \times \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \times \frac{r_2}{r_1}$$

Combining with Eq. (5) gives $r_1 = r_2$

Hence, it is an equilateral triangle with

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 60^\circ \\ \psi_2 &= 60^\circ \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

The distance ρ is calculated from the Cosine Rule.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + (R+r)^2 - 2r(R+r) \cos 60^\circ \\ \rho &= \sqrt{r^2 + rR + R^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

Alternative Solution to 1.2

Since μ is infinitesimal, it has no gravitational influences on the motion of neither M nor m . For μ to remain stationary relative to both M and m we must have:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu \omega^2 \rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3} \rho \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2} \sin \theta_2 \dots\dots\dots (5)$$

Note that
$$\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin \theta_1}$$

$$\frac{r_2}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \theta_2} \quad (\text{see figure})$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{R}{r} \times \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \times \frac{r_2}{r_1} \dots\dots\dots (6)$$

Equations (5) and (6):
$$r_1 = r_2 \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{m}{M} \dots\dots\dots (8)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \dots\dots\dots (9)$$

The equation (4) then becomes:

$$M \cos \theta_1 + m \cos \theta_2 = \frac{(M+m)}{(R+r)^3} r_1^2 \rho \dots\dots\dots (10)$$

Equations (8) and (10):
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2 \rho}{(R+r)^3} \sin \theta_2 \dots\dots\dots (11)$$

Note that from figure,
$$\frac{\rho}{\sin \psi_2} = \frac{r}{\sin \theta_2} \dots\dots\dots (12)$$

Equations (11) and (12): $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2 r}{(R+r)^3} \sin \psi_2$ (13)

Also from figure,

$$(R+r)^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1^2 = 2r_1^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$
 (14)

Equations (13) and (14): $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin \psi_2}{2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$ (15)

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ - \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ - 2\psi_2 \quad (\text{see figure})$$

$$\therefore \cos \psi_2 = \frac{1}{2}, \psi_2 = 60^\circ, \psi_1 = 60^\circ$$

Hence M and m form an equilateral triangle of sides $(R+r)$

Distance μ to M is $R+r$

Distance μ to m is $R+r$

Distance μ to O is $\rho = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2} - R\right)^2 + \left\{\left(R+r\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}^2} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$

1.3 The energy of the mass μ is given by

$$E = -\frac{GM\mu}{r_1} - \frac{Gm\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\omega^2\right)$$
(15)

Since the perturbation is in the radial direction, angular momentum is conserved

($r_1 = r_2 = \mathfrak{R}$ and $m = M$),

$$E = -\frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho^2}\right)$$
(16)

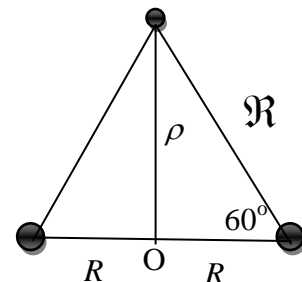
Since the energy is conserved,

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^2} \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0$$
(17)

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{\rho}{\mathfrak{R}}$$
(18)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^3} \rho \frac{d\rho}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0$$
(19)



Since $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$, we have

$$\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho^3} = 0 \text{ or}$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho^3}. \quad \dots\dots\dots(20)$$

The perturbation from \mathfrak{R}_0 and ρ_0 gives $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right)$ and $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$.

Then

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\rho_0 + \Delta\rho) = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right)^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\rho_0^4 \omega_0^2}{\rho_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3} \quad \dots\dots\dots(21)$$

Using binomial expansion $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \left(1 - \frac{3\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right) + \rho_0 \omega_0^2 \left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right). \quad \dots\dots\dots(22)$$

Using $\Delta\rho = \frac{\mathfrak{R}}{\rho} \Delta\mathfrak{R}$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0 \Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \rho_0 \omega_0^2 \left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right). \quad \dots\dots\dots(23)$$

Since $\omega_0^2 = \frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3}$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2 \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0 \Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \omega_0^2 \rho_0 \left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2 \rho_0 \left(\frac{4\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0 \Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2 \Delta\rho \left(4 - \frac{3\rho_0^2}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad \dots\dots\dots(26)$$

From the figure, $\rho_0 = \mathfrak{R}_0 \cos 30^\circ$ or $\frac{\rho_0^2}{\mathfrak{R}_0^2} = \frac{3}{4}$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2 \Delta\rho \left(4 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \Delta\rho. \quad \dots\dots\dots(27)$$

Angular frequency of oscillation is $\frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$.

Alternative solution:

$M = m$ gives $R = r$ and $\omega_0^2 = \frac{G(M+M)}{(R+R)^3} = \frac{GM}{4R^3}$. The unperturbed radial distance of μ is

$\sqrt{3}R$, so the perturbed radial distance can be represented by $\sqrt{3}R + \zeta$ where $\zeta \ll \sqrt{3}R$ as shown in the following figure.

Using Newton's 2nd law, $-\frac{2GM\mu}{\{R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) = \mu \frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{3}R + \zeta) - \mu\omega^2(\sqrt{3}R + \zeta)$.

(1)

The conservation of angular momentum gives $\mu\omega_0(\sqrt{3}R)^2 = \mu\omega(\sqrt{3}R + \zeta)^2$.

(2)

Manipulate (1) and (2) algebraically, applying $\zeta^2 \approx 0$ and binomial approximation.

$$-\frac{2GM}{\{R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{2GM}{\{4R^2 + 2\sqrt{3}\zeta R\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) \approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{GM}{4R^3}\sqrt{3}R \frac{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)}{(1 + \sqrt{3}\zeta/2R)^{3/2}} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\omega_0^2\sqrt{3}R \left(1 - \frac{3\sqrt{3}\zeta}{4R}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{3}R}\right) \approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \omega_0^2\sqrt{3}R \left(1 - \frac{3\zeta}{\sqrt{3}R}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\zeta = -\left(\frac{7}{4}\omega_0^2\right)\zeta$$

1.4 Relative velocity

Let v = speed of each spacecraft as it moves in circle around the centre O.

The relative velocities are denoted by the subscripts A, B and C.

For example, v_{BA} is the velocity of B as observed by A.

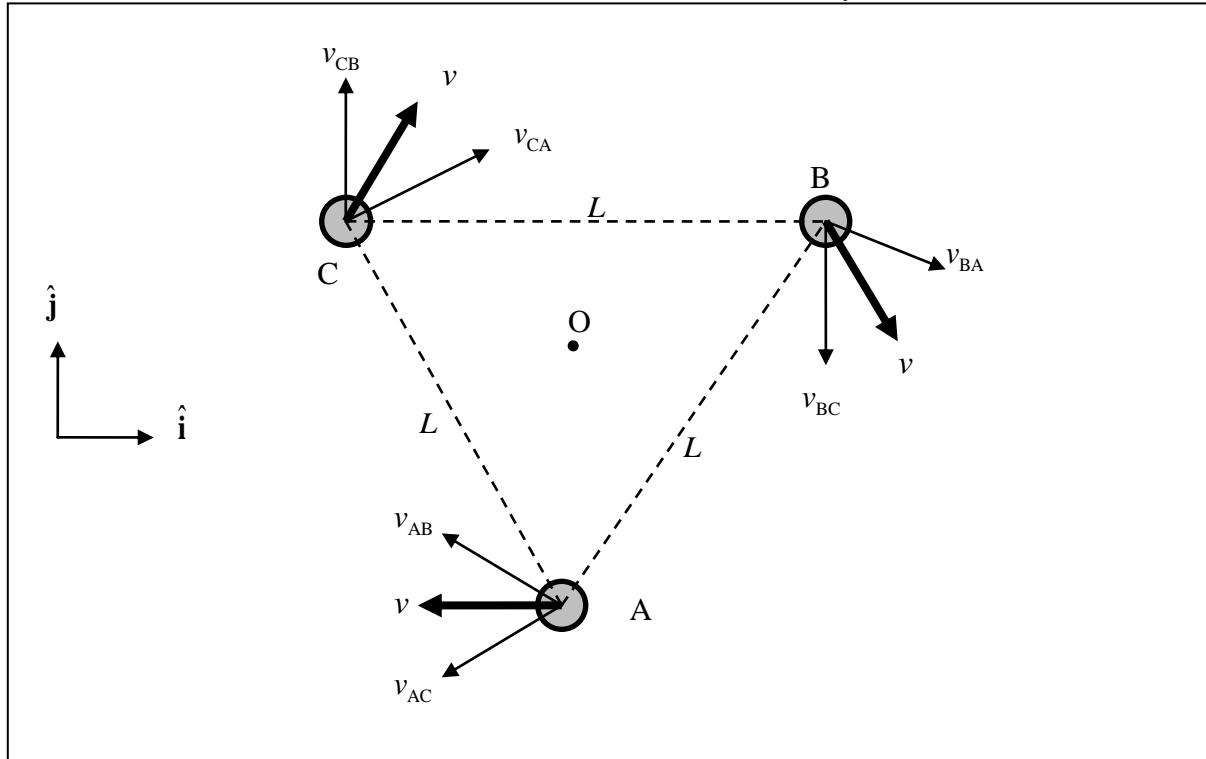
The period of circular motion is 1 year $T = 365 \times 24 \times 60 \times 60$ s. (28)

The angular frequency $\omega = \frac{2\pi}{T}$

The speed $v = \omega \frac{L}{2 \cos 30^\circ} = 575$ m/s (29)

The speed is much less than the speed light \rightarrow Galilean transformation.

In Cartesian coordinates, the velocities of B and C (as observed by O) are



For B, $\vec{v}_B = v \cos 60^\circ \hat{i} - v \sin 60^\circ \hat{j}$

For C, $\vec{v}_C = v \cos 60^\circ \hat{i} + v \sin 60^\circ \hat{j}$

Hence $\vec{v}_{BC} = -2v \sin 60^\circ \hat{j} = -\sqrt{3}v \hat{j}$

The speed of B as observed by C is $\sqrt{3}v \approx 996 \text{ m/s}$ (30)

Notice that the relative velocities for each pair are anti-parallel.

Alternative solution for 1.4

One can obtain v_{BC} by considering the rotation about the axis at one of the spacecrafts.

$$v_{BC} = \omega L = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}} (5 \times 10^6 \text{ km}) \approx 996 \text{ m/s}$$