

3. Εορτασμός της Εκατονταετηρίδας του Ατομικού Προτύπου του Rutherford: Η σκέδαση ενός ιόντος από ένα ουδέτερο άτομο

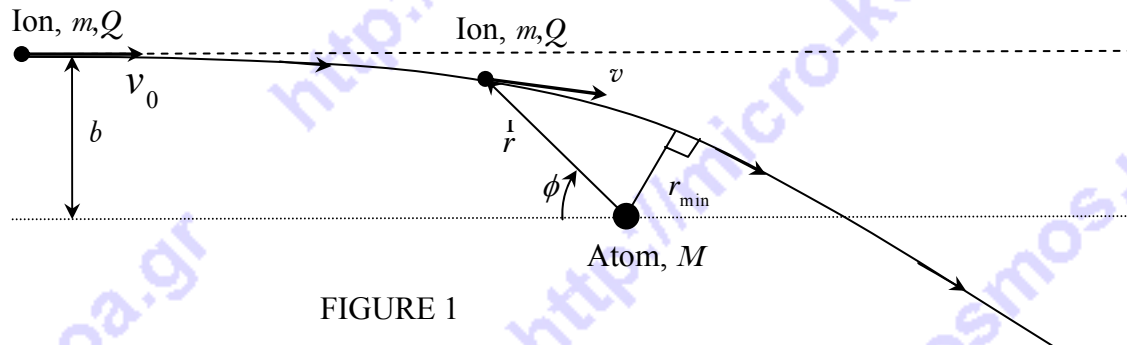


FIGURE 1

Ένα ιόν μάζας m , φορτίου Q , κινείται με αρχική μη σχετικιστική ταχύτητα u_0 από πολύ μακρινή απόσταση προς το μέρος ενός ουδέτερου ατόμου μάζας M , όπου $M \gg m$, και με συντελεστή ηλεκτρικής πόλωσης α (electrical polarisability). Ο παράγοντας κρούσης είναι b , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Το άτομο πολώνεται στιγμιαία από το ηλεκτρικό πεδίο (\vec{E}) του ιόντος που πλησιάζει το άτομο. Η ηλεκτρική ροπή του διπόλου του ατόμου που δημιουργείται είναι $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Αγνοείστε, σε αυτό το πρόβλημα, οποιαδήποτε ακτινοβολούσα ενέργεια.

3.1 Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (\vec{E}) σε απόσταση r από ένα ιδανικό ηλεκτρικό δίπολο \vec{p} , ως προς το σημείο αναφοράς O , κατά μήκος της διεύθυνσης \vec{p} , στο Σχήμα 2.

[1.2 points]

$$p = 2aq, \quad r \gg a$$

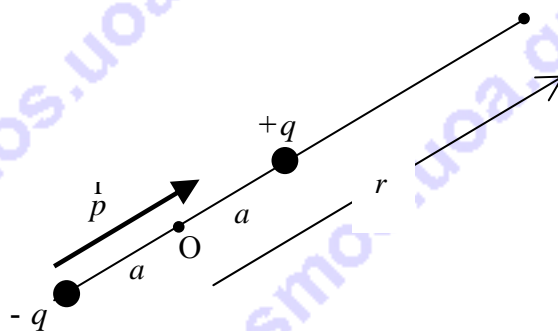


FIGURE 2

3.2 Να εξάγετε τη σχέση που δίνει τη δύναμη \vec{f} που ασκείται στο ιόν λόγω του πολωμένου ατόμου. Να δείξετε ότι αυτή η δύναμη είναι ελκτική ανεξαρτήτως του προσήμου (είδους) του φορτίου του ιόντος. **[2.2 points]**

3.3 Να προσδιορίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια λόγω της αλληλεπίδρασης του ζεύγους ιόντος-ατόμου, σε συνάρτηση των φυσικών μεγεθών α , Q και r . **[0.6 points]**

3.4 Να προσδιορίσετε τη σχέση για το r_{\min} , την ελάχιστη απόσταση που πλησιάζει το ιόν το άτομο, όπως στο Σχήμα 1. **[1.8 points]**

3.5 Αν η παράμετρος κρούσης b είναι μικρότερη από μια κρίσιμη τιμή b_0 , το ιόν θα διαγράψει μια ελικοειδή τροχιά γύρω από το άτομο. Σε μια τέτοια περίπτωση, το ιόν θα γίνει ηλεκτρικά ουδέτερο, και άρα το άτομο θα φορτιστεί ηλεκτρικά. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως αλληλεπίδραση «ανταλλαγής φορτίου». Να προσδιορίσετε το εμβαδόν της ενεργού διατομής, $A = \pi b_0^2$ για αυτή την κρούση του ατόμου, στο σύστημα αναφοράς του ιόντος. **[2.2 points]**

QUESTION 3: SOLUTION

1. Using Coulomb's Law, we write the electric field at a distance r is given by

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+a)^2}$$

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2} \right) \dots\dots\dots(1)$$

Using binomial expansion for small a ,

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{2a}{r} - 1 + \frac{2a}{r} \right)$$

$$= + \frac{4qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} = + \frac{qa}{\pi\epsilon_0 r^3} \dots\dots\dots(2)$$

$$= \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

2. The electric field seen by the atom from the ion is

$$\vec{E}_{ion} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \dots\dots\dots (3)$$

The induced dipole moment is then simply

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{ion} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \dots\dots\dots (4)$$

From eq. (2)

$$\vec{E}_p = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r}$$

The electric field intensity \vec{E}_p at the position of an ion at that instant is, using eq. (4),

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\frac{2\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right] = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{r}$$

The force acting on the ion is

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{r} \dots\dots\dots (5)$$

The “-” sign implies that this force is attractive and Q^2 implies that the force is attractive regardless of the sign of Q .

3. The potential energy of the ion-atom is given by $U = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r}$ (6)

Using this, $U = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$ (7)

[Remark: Students might use the term $-\vec{p} \cdot \vec{E}$ which changes only the factor in front.]

4. At the position r_{\min} we have, according to the Principle of Conservation of Angular Momentum,

$$mv_{\max} r_{\min} = mv_0 b$$

$$v_{\max} = v_0 \frac{b}{r_{\min}} \dots\dots\dots (8)$$

And according to the Principle of Conservation of Energy:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{-\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2 \dots\dots\dots (9)$$

Eqs.(12) & (13):

$$\left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^2 - \frac{\alpha Q^2 / \frac{1}{2}mv_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 b^4} \left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^4 = 1$$

$$\left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + \frac{\alpha Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 mv_0^2 b^4} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

The roots of eq. (14) are:

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 mv_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (11)$$

[Note that the equation (14) implies that r_{\min} cannot be zero, unless b is itself zero.]

Since the expression has to be valid at $Q = 0$, which gives

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} [1 \pm 1]^{\frac{1}{2}}$$

We have to choose “+” sign to make $r_{\min} = b$

Hence,

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 mv_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(12)$$

5. A spiral trajectory occurs when (16) is imaginary (because there is no minimum distance of approach).

r_{\min} is real under the condition:

$$1 \geq \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}$$

$$b \geq b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \dots\dots\dots (13)$$

For $b < b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$ the ion will collide with the atom.

Hence the atom, as seen by the ion, has a cross-sectional area A ,

$$A = \pi b_0^2 = \pi \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (14)$$