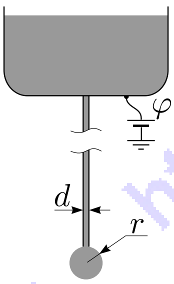
Πρόβλημα Τ2. Σταγονόμετρο νερού του Kelvin *(8 μονάδες)*

Τα ακόλουθα στοιχεία σχετικά με την Επιφανειακή Τάση μπορεί να σας φανούν χρήσιμα για το Πρόβλημα αυτό. Για τα μόρια ενός υγρού, οι θέσεις στη δι-επιφάνειά μορίων υγρού-αέρα συνιστούν μια Περιοχή που είναι λιγότερο ευνοϊκή σε σύγκριση με τις θέσεις στο εσωτερικό του όγκου του υγρού. Συνεπώς, στην Περιοχή αυτή αποδίδεται η λεγόμενη Επιφανειακή Ενέργεια U = σS, όπου S είναι το εμβαδό της Περιοχής και σ ο Συντελεστής Επιφανειακής Τάσης του υγρού. Επιπρόσθετα, δύο τμήματα της επιφάνειας του υγρού ασκούν αμοιβαίες έλξεις μέτρου F = σl, όπου l είναι η απόσταση των δύο τμημάτων.

Ένας μακρύς μεταλλικός σωλήνας με εσωτερική διάμετρο *d* βρίσκεται κατακόρυφα προσανατολισμένος κάτω από μια δεξαμενή η οποία στάζει νερό από την κάτω της επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Το νερό μπορεί να θεωρηθεί ηλεκτρικά αγώγιμο, με επιφανειακή τάση σ και πυκνότητα *ρ*. Να υποθέσετε ότι



διαρκώς ισχύει $d \ll r$. Το *r* είναι η ακτίνα της σταγόνας που κρέμεται κάτω από το άκρο του σωλήνα, η οποία μεγαλώνει αργά μέχρι να διαχωριστεί από αυτόν λόγω της επιτάχυνσης της βαρύτητας *g*.

Μέρος Α. Μονός σωλήνας *(4 μονάδες)*

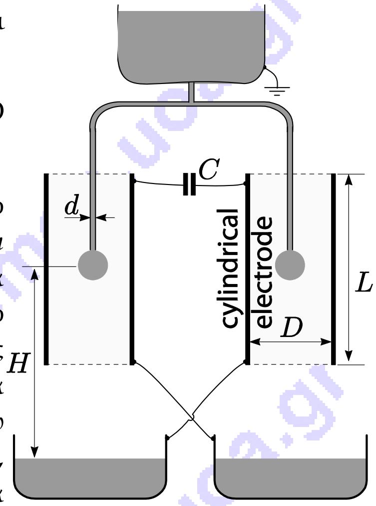
i. (1.2 μονάδες) Να βρείτε την ακτίνα r_{max} της σταγόνας αμέσως πριν διαχωριστεί από το άκρο του σωλήνα.

ii. (1.2 μονάδες) Σε σχέση με σημεία στο άπειρο, το ηλεκτροστατικό δυναμικό του σωλήνα είναι *φ*. Να βρείτε το φορτίο *Q* όταν η ακτίνα της σταγόνας είναι *r*.

iii. (1.6 μονάδες) Για αυτό το ερώτημα, να υποθέσετε ότι το *r* παραμένει σταθερό και το φ αυξάνεται σταδιακά με βραδύ ρυθμό. Η σταγόνα γίνεται ασταθής και διαχωρίζεται σε δύο κομματια, εάν η εσωτερική υδροστατική πίεσή της γίνει μικρότερη από την ατμοσφαιρική. Να βρείτε την οριακή (κρίσιμη) τιμή του δυναμικού φ_{max} για την οποία συμβαίνει αυτό.

Μέρος Β. Δύο σωλήνες *(4 μονάδες)*

Μία συσκευή η οποία ονομάζεται «σταγονόμετρο νερού του Kelvin» αποτελείται από δύο σωλήνες (όμοιους με τον σωλήνα που περιγράφεται στο Μέρος Α του προβλήματος), συνδεδεμένους μεταξύ τους μέσω μιας ένωσης σχήματος Τ, όπως στο σχήμα. Τα άκρα των δύο σωλήνων βρίσκονται στα κέντρα δύο κυλινδρικών ηλεκτροδίων (με ύψος *L* και διάμετρο *D*, $L \gg D \gg r$). Ο ρυθμός με τον οποίο πέφτουν οι σταγόνες είναι *n* (σταγόνες ανά μονάδα χρόνου), και για τους δύο σωλήνες. Οι σταγόνες πέφτουν από ύψος *H* μέσα σε αγώγιμα δοχεία κάτω από τα άκρα των σωλήνων, τα οποία είναι σταυρωτά συνδεδεμένα με τα ηλεκτρόδια όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα ηλεκτρόδια είναι συνδεδεμένα μέσω ενός πυκνωτή χωρητικότη-τας *C*. Το ολικό φορτίο του συστήματος των δοχείων και των ηλεκτροδίων είναι μηδέν. Σημειώστε ότι το δοχείο παροχής υγρού στην κορυφή του σχήματος είναι γειωμένο.



Η πρώτη σταγόνα, κατά την αποκόλλησή της, φέρει μικροσκοπικό φορτίο, το οποίο θα προκαλέσει μια ανισορροπία μεταξύ των δύο πλευρών και ένα μικρό διαχωρισμό φορτίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή που δημιουργείται εκείνη τη στιγμή.

i. (1.2 μονάδες) Να εκφράσετε την απόλυτη τιμή του φορτίου Q_0 των σταγόνων που διαχωρίζονται, τη χρονική στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή είναι *q*, σε σχέση με τον όρο r_{max} (από το Μέρος Α-i). Να μη λάβετε υπόψη το φαινόμενο που περιγράφεται στο Μέρος Α-iii.

ii. (1.5 μονάδες) Να βρείτε μια σχέση του *q* από το χρόνο *t*, προσεγγίζοντάς τη με μία συνεχή συνάρτηση *q*(*t*) και υποθέτωντας ότι $q(0) = q_0$.

iii. (1.3 μονάδες) Η λειτουργία του σταγονόμετρου μπορεί να εμποδιστεί από το φαινόμενο που παρουσιάζεται στο Μέρος Α-iii. Επιπρόσθετα, υπάρχει μια οριακή τιμή U_{max} της τάσης που μπορεί να επιτευχθεί ανάμεσα στα ηλεκτρόδια, λόγω της ηλεκτροστατικής άπωσης μεταξύ μιάς σταγόνας και του δοχείου κάτω από αυτή. Να βρείτε την οριακή αυτή τιμή U_{max}.

The 43rd International Physics Olympiad — July 2012

Grading scheme: Theory

General rules This grading scheme describes the number of points allotted for each term entering a useful formula. These terms don't need to be separately described: if a formula is written correctly, full marks (the sum of the marks of all the terms of that formula) are given. If a formula is not written explicitly, but it is clear that individual terms are written bearing the equation in mind (eg. indicated on a diagram), marks for these terms will be given. Some points are allotted for mathematical calculations.

If a certain term of a useful formula is written incorrectly, 0.1 is subtracted for a minor mistake (eg. missing non-dimensional factor); no mark is given if the mistake is major (with non-matching dimensionality). The same rule is applied to the marking of mathematical calculations: each minor mistake leads to a subtraction of 0.1 pts (as long as the remaining score for that particular calculation remains positive), and no marks are given in the case of dimensional mistakes.

No penalty is applied in these cases when a mistake is clearly just a rewriting typo (i.e. when there is no mistake in the draft).

If formula is written without deriving: if it is simple enough to be derived in head, full marks, otherwise zero marks.

If there two solutions on Solution sheets, one correct and another incorrect: only the one wich corresponds to the Answer Sheets is taken into account. What is crossed out is never considered.

No penalty is applied for propagating errors unless the calculations are significantly simplified (in which case mathematical calculations are credited partially, according to the degree of simplification, with marking granularity of 0.1 pts).

Problem T2. Kelvin water dropper *(8 points)*

Part A. Single pipe *(4 points)*

i. (1.2 pts) For the terms entering the force balance of a droplet immediately before separation from the nozzle, the points are given as follows:

$$mg \text{ — } 0.2 \text{ pts};$$
$$m = \rho V \text{ — } 0.1 \text{ pts};$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \text{ — } 0.1 \text{ pts};$$
$$\pi\sigma d \text{ — } 0.4 \text{ pts}.$$

(if geometrically obtained $\cos\alpha$ is included, 0.2 pts)

Force balance equation including these terms — 0.2 pts;

For expressing r_{max} from the equation — 0.2 pts.

ii. (1.2 pts)

Stating that the droplet's potential is φ — 0.2 pts

(if used correctly, this does not need to be explicitly stated).

Expressing the droplet's potential as $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ — 0.8 pts

(without correct sign — 0.6 pts).

Expressing Q from the obtained equation — 0.2 pts.

iii. (1.6 pts) The components of the excess pressure are graded as follows.

$$2\sigma/r \text{ — } 0.5 \text{ pts};$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \text{ — } 0.4 \text{ pts};$$

bringing it to the form $\frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi^2/r^2$ — 0.2 pts.

Noticing that the two effects have opposite sign — 0.2 pts

(if used correctly, this does not need to be stated separately).

Equation stating that the excess pressure is 0 — 0.1 pts;

Expressing $\varphi_{\max}$ from the obtained equation — 0.2 pts.

In the case of energy-balance-based solution, the distribution of marks is as follows.

surface energy change as $4\pi\sigma d(r^2) = 8\pi\sigma r dr$ — 0.5 pts;

electrostatic energy change as $2\pi\varepsilon_0\varphi_{\max}^2 dr$ — 0.5 pts;

electrostatic work as $dA_{\text{el}} = 4\pi\varepsilon_0\varphi_{\max}^2 dr$ — 0.3 pts;

equation stating that en. change equals to work — 0.1 pts;

expressing $\varphi_{\max}$ from the obtained equation — 0.2 pts.

0 pts if energy are equated (without virtual displacement). If factor $\frac{1}{2}$ missing before the electrostat. force (but otherwise correct), -0.2 pts).

Part B. Two pipes *(4 points)*

i. (1.2 pts)

Stating that the surroundings' potential is $-U/2$ — 0.4 pts;

(if not stated but used correctly — full marks; opposite signs are allowed to be chosen *consistently*)

stating that the droplet's potential is 0 — 0.4 pts

(if not stated but used correctly — full marks)

Applying formula $U = q/C$ — 0.2 pts

Using the result of Part A with

$\varphi = U/2$ to obtain the final result — 0.2 pts.

the solutions with U instead of $U/2$ will qualify for 0.4 pts for the first two lines (i.e. in total up to 0.8)

ii. (1.5 pts)

Stating that a droplet will increase the capacitor's

charge by its own charge $Q = 2\pi\varepsilon_0 q r_{\max}/C$ — 0.4 pts;

(0 pts if wrong sign)

(0.2 pts if redundant factor "2")

Expressing $dq = Q\,dN$ — 0.2 pts;

Substituting $dN = n\,dt$ — 0.2 pts;

solving the obtained differential equation — 0.5 pts;

determining the integration constant from

the initial condition — 0.1 pts;

substituting $r_{\max}$ from above — 0.1 pts.

iii. (1.3 pts) Equation for the energy balance of a droplet:

expressing the droplet's electrostatic energy change during the fall as UQ — 0.6 pts

(0.3 for $UQ/2$)

expressing the droplet's gravitational energy change as mgH — 0.2 pts

noticing that at the limit voltage, droplet's terminal kinetic energy is zero — 0.3 pts

expressing energy conservation law equation — 0.1 pts

expressing the final answer — 0.1 pts.

(if bowl considered as a point charge, only the mgh line and the kin. en. lines are applicable)

If instead of the energy balance, the force balance is used (which is incorrect), partial credit for the terms entering the equation is given as follows.

gravity force gm — 0.2 pts

electric field estimated as $E \approx U/(H - L/2)$ — 0.2 pts

(0.1, if not realized that this is an approximation)

electric force $F = EQ$ — 0.1 pts

writing down force balance equation — 0.1 pts.

expressing the final answer — 0.1 pts.

(if bowl considered as a point charge, only the first line and the force balance line are applicable)

Problem T2. Kelvin water dropper *(8 points)*

Part A. Single pipe *(4 points)*

i. (1.2 pts) Let us write the force balance for the droplet. Since $d \ll r$, we can neglect the force $\frac{\pi}{4}\Delta p d^2$ due to the excess pressure Δp inside the tube. So, the gravity force $\frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \rho g$ is balanced by the capillary force. When the droplet separates from the tube, the water surface forms in the vicinity of the nozzle a "neck", which has vertical tangent. In the horizontal cross-section of that "neck", the capillary force is vertical and can be calculated as $\pi\sigma d$. So,

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}.$$

ii. (1.2 pts) Since $d \ll r$, we can neglect the change of the droplet's capacitance due to the tube. On the one hand, the droplet's potential is φ; on the other hand, it is $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$. So,

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \varphi r.$$

iii. (1.6 pts) Excess pressure inside the droplet is caused by the capillary pressure $2\sigma/r$ (increases the inside pressure), and by the electrostatic pressure $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi^2/r^2$ (decreases the pressure). So, the sign of the excess pressure will change, if $\frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi_{\max}^2/r^2 = 2\sigma/r$, hence

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\sigma r/\varepsilon_0}.$$

The expression for the electrostatic pressure used above can be derived as follows. The electrostatic force acting on a surface charge of density σ and surface area S is given by $F = \sigma S \cdot \bar{E}$, where $\bar{E}$ is the field at the site without the field created by the surface charge element itself. Note that this force is perpendicular to the surface, so F/S can be interpreted as a pressure. The surface charge gives rise to a field drop on the surface equal to $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$ (which follows from the Gauss law); inside the droplet, there is no field due to the conductivity of the droplet: $\bar{E} - \frac{1}{2}\Delta E = 0$; outside the droplet, there is field $E = \bar{E} + \frac{1}{2}\Delta E$, therefore $\bar{E} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\Delta E$. Bringing everything together, we obtain the expression used above.

Note that alternatively, this expression can be derived by considering a virtual displacement of a capacitor's surface and comparing the pressure work $p\Delta V$ with the change of the electrostatic field energy $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Delta V$.

Finally, the answer to the question can be also derived from the requirement that the mechanical work dA done for an infinitesimal droplet inflation needs to be zero. From the energy conservation law, $dW + dW_{\text{el}} = \sigma\, d(4\pi r^2) + \frac{1}{2}\varphi_{\max}^2\, dC_d$, where the droplet's capacitance $C_d = 4\pi\varepsilon_0 r$; the electrical work $dW_{\text{el}} = \varphi_{\max} dq = 4\pi\varepsilon_0\varphi_{\max}^2 dr$. Putting $dW = 0$ we obtain an equation for $\varphi_{\max}$, which recovers the earlier result.

Part B. Two pipes *(4 points)*

i. (1.2 pts) This is basically the same as Part A-ii, except that the surroundings' potential is that of the surrounding electrode, $-U/2$ (where $U = q/C$ is the capacitor's voltage) and droplet has the ground potential (0). As it is not defined which electrode is the positive one, opposite sign of the potential may be chosen, if done consistently. Note that since the cylindrical electrode is long, it shields effectively the environment's (ground, wall, etc) potential. So, relative to its surroundings, the droplet's potential is $U/2$. Using the result of Part A we obtain

$$Q = 2\pi\varepsilon_0 U r_{\max} = 2\pi\varepsilon_0 q r_{\max}/C.$$

ii. (1.5 pts) The sign of the droplet's charge is the same as that of the capacitor's opposite plate (which is connected to the farther electrode). So, when the droplet falls into the bowl, it will increase the capacitor's charge by Q:

$$dq = 2\pi\varepsilon_0 U r_{\max} dN = 2\pi\varepsilon_0 r_{\max} n dt \frac{q}{C},$$

where $dN = ndt$ is the number of droplets which fall during the time dt This is a simple linear differential equation which is solved easily to obtain

$$q = q_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max} n}{C} = \frac{\pi\varepsilon_0 n}{C}\sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}.$$

iii. (1.3 pts) The droplets can reach the bowls if their mechanical energy mgH (where m is the droplet's mass) is large enough to overcome the electrostatic push: The droplet starts at the point where the electric potential is 0, which is the sum of the potential $U/2$, due to the electrode, and of its self-generated potential $-U/2$. Its motion is not affected by the self-generated field, so it needs to fall from the potential $U/2$ down to the potential $-U/2$, resulting in the change of the electrostatic energy equal to $UQ \le mgH$, where $Q = 2\pi\varepsilon_0 U r_{\max}$ (see above). So,

$$U_{\max} = \frac{mgH}{2\pi\varepsilon_0 U_{\max} r_{\max}},$$

$$\therefore U_{\max} = \sqrt{\frac{H\sigma d}{2\varepsilon_0 r_{\max}}} = \sqrt[6]{\frac{H^3 g\sigma^2\rho d^2}{6\varepsilon_0^3}}.$$