## Πρόβλημα Τ3. Δημιουργία ενός ΠρωτοΑστέρα *(9 μονάδες)*

Θα προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε ένα άστρο όπως περιγράφεται πιο κάτω: Θεωρήστε ένα σφαιρικό σύννεφο αραιής μεσο-αστρικής σκόνης υπό αέρια μορφή, το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και που αρχίζει να συμπιέζεται λόγω της βαρυτικής του κατάρρευσης. Η αρχική ακτίνα της υποτιθέμενης σφαίρας είναι $r_0$ και η μάζα της $m$. Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου (ο οποίος είναι πολύ αραιότερος από το αέριο) και η αρχική θερμοκρασία του αερίου μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν σταθερή τιμή σε όλο τον όγκο ίση προς $T_0$. Το αέριο μπορεί να θεωρηθεί ιδανικό. Η μέση μοριακή μάζα του αερίου είναι $\mu$ και ο αδιαβατικός του συντελεστής $\gamma > 4/3$.

Υποθέστε ότι $Gm\mu / r_0 \gg RT_0$, όπου $R$ η Παγκόσμια Σταθερά των αερίων και $G$ η Σταθερά της Παγκόσμια Έλξης.

**i. (0.8 μονάδες)** Κατά τη διάρκεια του μεγαλύτερου μέρους της κατάρρευσης, το αέριο είναι τόσο αγώγιμο θερμικά ώστε οποιαδήποτε θερμότητα δημιουργείται στο εσωτερικό της σφαίρας, διαφεύγει μακριά. Δηλαδή η σφαίρα παραμένει σε θερμοδυναμική ισορροπία με τον περιβάλλοντα χώρο. Πόσες φορές ($n$) έχει αυξηθεί η πίεση του εσωτερικού χώρου της σφαίρας, όταν η ακτίνα συμπίεσης/κατάρρευσης φτάσει στο μισό ($r_1 = 0.5r_0$); Υποθέστε ότι η πυκνότητα του αερίου έχει καθ΄όλη τη διαδικασία της συμπύκνωσης, ίδια τιμή σε όλο τον όγκο.

**ii. (1 μονάδα)** Γράψτε μια προσεγγιστική εξίσωση του χρόνου $t_2$ που χρειάζεται ώστε η ακτίνα της σφαίρας να συρρικνωθεί από $r_0$ σε $r_2 = 0.95r_0$. Κατά την πτώση ενός μορίου του αερίου, αγνοήστε την αλλαγή του βαρυτικού πεδίου στη θέση του μορίου.

**iii. (2.5 μονάδες)** Υποθέτοντας ότι η πίεση παραμένει αμελητέα, υπολογίστε το χρόνο $t_{r\to 0}$ που χρειάζεται ώστε το άστρο να συρρικνωθεί από την αρχική του ακτίνα $r_0$ στην μικρότερη δυνατή του ακτίνα, χρησιμοποιώντας το νόμο του Kepler για ελλειπτικές τροχιές.

**iv. (1.7 μονάδες)** Σε κάποια ακτίνα $r_3 \ll r_0$ το αέριο γίνεται αρκετά πυκνό και η θερμική ακτινοβολία δεν καταφέρνει πια να διαφεύγει από αυτό. Υπολογίστε το ποσό της ακτινοβολούμενης θερμότητας $Q$ κατά τη διάρκεια της συμπίεσης του άστρου από $r_0$ μέχρι η ακτίνα του να γίνει $r_3$.

**v. (1 μονάδα)** Για τιμές της ακτίνας μικρότερες του $r_3$ μπορείτε να αμελήσετε την ακτινοβολούμενη θερμότητα από το άστρο. Βρείτε μια συνάρτηση που συνδέει τη θερμοκρασία $T$ του άστρου με την ακτίνα του $r < r_3$.

**vi. (2 μονάδες)** Στο τελικό στάδιο κατάρρευσης δε μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της πίεσης στη δυναμική μελέτη του αερίου, έτσι η συμπύκνωση σταματά σε μια ακτίνα $r = r_4$ (με $r_4 \ll r_3$). Όμως, τη θερμική ακτινοβολία μπορούμε να συνεχίσουμε να την αγνοούμε, και η θερμοκρασία συνεχίζει να μην είναι τόσο υψηλή που να προκαλέσει πυρηνική σύντηξη. Η πίεση ενός τέτοιου πρωτοΑστέρα δε μπορεί πλέον να θεωρηθεί ότι έχει ίδια τιμή σε όλο τον όγκο του, αλλά μπορούμε ακόμη να κάνουμε πρόχειρες εκτιμήσεις έστω και με ανακριβείς τιμές αριθμητικών παραγόντων. Κάνοντας την κατάλληλη προσέγγιση, εκτιμήστε την τελική ακτίνα $r_4$ καθώς και την αντίστοιχη θερμοκρασία $T_4$.

# The 43^rd International Physics Olympiad — July 2012

## Grading scheme: Theory

**General rules** This grading scheme describes the number of points allotted for each term entering a useful formula. These terms don't need to be separately described: if a formula is written correctly, full marks (the sum of the marks of all the terms of that formula) are given. If a formula is not written explicitly, but it is clear that individual terms are written bearing the equation in mind (eg. indicated on a diagram), marks for these terms will be given. Some points are allotted for mathematical calculations.

If a certain term of a useful formula is written incorrectly, 0.1 is subtracted for a minor mistake (eg. missing non-dimensional factor); no mark is given if the mistake is major (with non-matching dimensionality). The same rule is applied to the marking of mathematical calculations: each minor mistake leads to a subtraction of 0.1 pts (as long as the remaining score for that particular calculation remains positive), and no marks are given in the case of dimensional mistakes.

No penalty is applied in these cases when a mistake is clearly just a rewriting typo (i.e. when there is no mistake in the draft).

**If formula is written without deriving: if it is simple enough to be derived in head, full marks, otherwise zero marks.**

**If there two solutions on Solution sheets, one correct and another incorrect: only the one wich corresponds to the Answer Sheets is taken into account. What is crossed out is never considered.**

No penalty is applied for propagating errors unless the calculations are significantly simplified (in which case mathematical calculations are credited partially, according to the degree of simplification, with marking granularity of 0.1 pts).

## Problem T3. Protostar formation *(9 points)*

**i. (0.8 pts)**

In thermodynamic equilibrium $T = \text{const}$ — 0.2 pts.
(if not stated but used correctly — full marks)

$$pV = \text{const} \text{ — 0.3 pts.}$$

$$V \propto r^3 \text{ — 0.1 pts.}$$

$$p \propto r^{-3} \text{ — 0.1 pts.}$$

$$\frac{p(r_1)}{p(r_0)} = 8 \text{ — 0.1 pts.}$$

**ii. (1 pt)**

$$t \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}} \text{ — 0.4 pts.}$$

$$g \approx \frac{Gm}{r_0^2} \text{ — 0.4 pts.}$$

$$t \approx \sqrt{\frac{0.1 r_0^3}{Gm}} \text{ — 0.2 pts.}$$

**iii. (2.5 pts)**

First solution:

Understanding that we have effectively interaction of two point masses — 0.5 pts.
(equivalently one may mention the $\propto r^{-2}$ force coming from Gauss' law; if not stated, but used correctly — full marks)

Idea of the motion as an ultraelliptical orbit — 1 pt.

Period of the elliptical orbit is equal to the period of the circular orbit of the same longer semiaxis — 0.4 pts.
(if not stated but used correctly — full marks)

The longer semiaxis is $r_0/2$ — 0.1 pts.

Equation(s) for the period — 0.3 pts.

We need half a period — 0.1 pts.

Final answer $t_{r\to 0} = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$ — 0.1 pts.

Alternative solution:

Understanding that we have effectively interaction of two point masses — 0.5 pts.
(equivalently one may mention the $\propto r^{-2}$ force coming from Gauss' law; if not stated, but used correctly — full marks)

Energy conservation as a differential equation — 0.3 pts.
(if only expressed through $v$ (like $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = E$) — 0.1 pts.; if the differential equation of Newton's 2$^{\text{nd}}$ law ($\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}$) is given *instead* — 0.2 pts.)

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}} \text{ (whichever the sign is) — 0.4 pts.}$$

Integration and final answer — 1.3 pts.

**iv. (1.7 pts)**

Radiated heat equals the compression work — 1 pt.
[for mentioning or using the 1$^{\text{st}}$ law of thermodynamics (possibly in a wrong way) — 0.5 pts.]

$$W = -\int p\,dV \text{ or } W = -\sum p\,\Delta V \text{ — 0.3 pts.}$$

(with either "+" or "−" — give full marks)

$$p = \frac{mRT_0}{\mu V} \text{ — 0.2 pts.}$$

Calculating the integral, $W = \frac{3mRT_0}{\mu}\ln\frac{r_0}{r_3}$ — 0.2 pts.

**v. (1 pt)**

The collapse continues adiabatically.
(If used, but not written down, give full marks.) — 0.3 pts.

$$pV^\gamma = \text{const} \text{ — 0.3 pts.}$$

$$T \propto V^{1-\gamma} \text{ — 0.2 pts.}$$

$$T = T_0\left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3} \text{ — 0.2 pts.}$$

**vi. (2 pts)**

In case of using energies (marks must not be subtracted for fewer approximations, even in the final answer):

$$T_4 = T_0\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3} \text{ — 0.1 pts.}$$

$$\Delta Q + \Delta\Pi \approx 0 \text{ — 0.4 pts.}$$

$$\Delta\Pi \approx -Gm^2/r_4 \text{ — 0.6 pts.}$$

$$\Delta Q = mc_V T_4 \text{ — 0.4 pts.}$$

$$c_V \approx \frac{R}{\mu} \text{ — 0.3 pts.}$$

Final answer $r_4 \approx r_3\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$ — 0.1 pts.

Final answer $T_4 \approx T_0\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$ — 0.1 pts.

In case of using pressures (again, fewer approximations are permitted):

$$T_4 = T_0\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3} \text{ — 0.1 pts.}$$

$$p_4 = p_{\text{hydrostatic}} \text{ — 0.4 pts.}$$

$$p_4 = \frac{\rho}{\mu}RT_4 \text{ — 0.5 pts.}$$

$$p_{\text{hydrostatic}} \approx \rho g r_4 \text{ — 0.4 pts.}$$

$$g \approx \frac{Gm}{r_4^2} \text{ — 0.4 pts.}$$

Final answer $r_4 \approx r_3\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$ — 0.1 pts.

Final answer $T_4 \approx T_0\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$ — 0.1 pts.

## Problem T3. Protostar formation *(9 points)*

**i. (0.8 pts)**

$$T = \text{const} \implies pV = \text{const}$$
$$V \propto r^3$$
$$\therefore p \propto r^{-3} \implies \frac{p(r_1)}{p(r_0)} = 2^3 = 8.$$

**ii. (1 pt)** During the period considered the pressure is negligible. Therefore the gas is in free fall. By Gauss' theorem and symmetry, the gravitational field at any point in the ball is equivalent to the one generated when all the mass closer to the center is compressed into the center. Moreover, while the ball has not yet shrunk much, the field strength on its surface does not change much either. The acceleration of the outermost layer stays approximately constant. Thus,

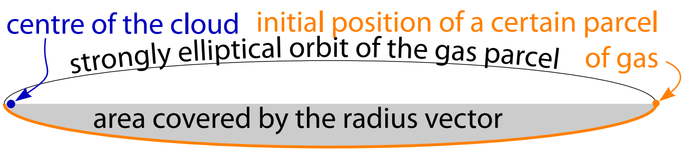
$$t \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}}$$

where

$$g \approx \frac{Gm}{r_0^2},$$
$$\therefore t \approx \sqrt{\frac{2r_0^2(r_0 - r_2)}{Gm}} = \sqrt{\frac{0.1r_0^3}{Gm}}.$$

**iii. (2.5 pts)** Gravitationally the outer layer of the ball is influenced by the rest just as the rest were compressed into a point mass. Therefore we have Keplerian motion: the fall of any part of the outer layer consists in a halfperiod of an ultra-elliptical orbit. The ellipse is degenerate into a line; its foci are at the ends of the line; one focus is at the center of the ball (by Kepler's 1$^{\text{st}}$ law) and the other one is at $r_0$, see figure (instead of a degenerate ellipse, a strongly elliptical ellipse is depicted). The period of the orbit is determined by the longer semiaxis of the ellipse (by Kepler's 3$^{\text{rd}}$ law). The longer semiaxis is $r_0/2$ and we are interested in half a period. Thus, the answer is equal to the halfperiod of a circular orbit of radius $r_0/2$:

$$\left(\frac{2\pi}{2t_{r\to 0}}\right)^2 \frac{r_0}{2} = \frac{Gm}{(r_0/2)^2} \implies t_{r\to 0} = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$




**Alternatively,** one may write the energy conservation law $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm}{r} = E$ (that in turn is obtainable from Newton's II law $\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}$) with $E = -\frac{Gm}{r_0}$, separate the variables $\left(\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}\right)$ and write the integral $t = -\int \frac{dr}{\sqrt{2E+\frac{2Gm}{r}}}$. This integral is probably not calculable during the limitted time given during the Olympiad, but a possible approach can be sketched as follows. Substituting $\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}} = \xi$ and $\sqrt{2E} = \upsilon$, one gets

$$\frac{t_\infty}{4Gm} = \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\upsilon^2 - \xi^2)^2}$$
$$= \frac{1}{4\upsilon^3}\int_0^\infty \left[\frac{\upsilon}{(\upsilon - \xi)^2} + \frac{\upsilon}{(\upsilon + \xi)^2} + \frac{1}{\upsilon - \xi} + \frac{1}{\upsilon + \xi}\right] d\xi.$$

Here (after shifting the variable) one can use $\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$ and $\int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{1}{\xi}$, finally getting the same answer as by Kepler's laws.

**iv. (1.7 pts)** By Clapeyron–Mendeleyev law,

$$p = \frac{mRT_0}{\mu V}.$$

Work done by gravity to compress the ball is

$$W = -\int p\,dV = -\frac{mRT_0}{\mu}\int_{\frac{4}{3}\pi r_0^3}^{\frac{4}{3}\pi r_3^3} \frac{dV}{V} = \frac{3mRT_0}{\mu}\ln\frac{r_0}{r_3}.$$

The temperature stays constant, so the internal energy does not change; hence, according to the 1$^{\text{st}}$ law of thermodynamics, the compression work $W$ is the heat radiated.

**v. (1 pt)** The collapse continues adiabatically.

$$pV^\gamma = \text{const} \implies TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$
$$\therefore T \propto V^{1-\gamma} \propto r^{3-3\gamma}$$
$$\therefore T = T_0\left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3}.$$

**vi. (2 pts)** During the collapse, the gravitational energy is converted into heat. Since $r_3 \gg r_4$, The released gravitational energy can be estimated as $\Delta\Pi = -Gm^2(r_4^{-1} - r_3^{-1}) \approx -Gm^2/r_4$ (exact calculation by integration adds a prefactor $\frac{3}{5}$); the terminal heat energy is estimated as $\Delta Q = c_V\frac{m}{\mu}(T_4 - T_0) \approx c_V\frac{m}{\mu}T_4$ (the approximation $T_4 \gg T_0$ follows from the result of the previous question, when combined with $r_3 \gg r_4$). So, $\Delta Q = \frac{R}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}T_4 \approx \frac{m}{\mu}RT_4$. For the temperature $T_4$, we can use the result of the previous question, $T_4 = T_0\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3}$. Since initial full energy was approximately zero, $\Delta Q + \Delta\Pi \approx 0$, we obtain

$$\frac{Gm^2}{r_4} \approx \frac{m}{\mu}RT_0\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3} \implies r_4 \approx r_3\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}.$$

Therefore,

$$T_4 \approx T_0\left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}.$$

**Alternatively,** one can obtain the result by approximately equating the hydrostatic pressure $\rho r_4 \frac{Gm}{r_4^2}$ to the gas pressure $p_4 = \frac{\rho}{\mu}RT_4$; the result will be exactly the same as given above.