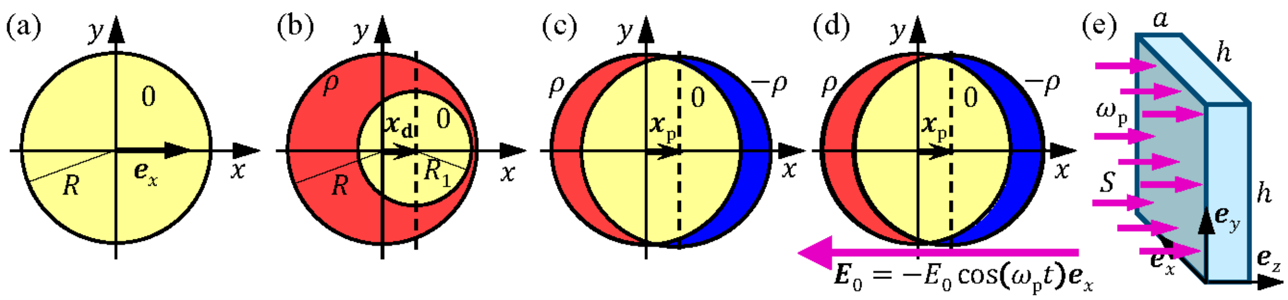
Εισαγωγή

Στο πρόβλημα αυτό μελετάμε μια αποδοτική διαδικασία παραγωγής ατμού που έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι λειτουργεί. Ένα υδατικό διάλυμα σφαιρικών σωματιδίων αργύρου με διαστάσεις τάξεις νανόμετρου (νανοσωματίδια) με περίπου μόλις 10^{13} σωματίδια ανά λίτρο, φωτίζεται από μια εστιασμένη ακτίνα φωτός. Ένα κλάσμα του φωτός απορροφάται από τα νανοσωματίδια, τα οποία θερμαίνονται και παράγουν τοπικά ατμό στο χώρο γύρω τους, χωρίς να θερμαίνουν συνολικά το υδατικό διάλυμα. Ο ατμός απελευθερώνεται από το σύστημα υπό μορφή φυσαλίδων. Επί του παρόντος δεν κατανοούμε πλήρως όλες τις λεπτομέρειες της διαδικασίας, αλλά γνωρίζουμε ότι η βασική διαδικασία είναι η απορρόφηση του φωτός μέσω των λεγόμενων συλλογικών ηλεκτρονιακών ταλαντώσεων των μεταλλικών νανοσωματιδίων. Η συσκευή ονομάζεται Γεννήτρια Πλασμονικού Ατμού.



Εικ. 2.1 (a) Ένα σφαιρικό, ηλεκτρικά ουδέτερο νανοσωματίδιο ακτίνας R, τοποθετημένο στο κέντρο του Συστήματος Αναφοράς. **(b)** Μια σφαίρα με ομογενή πυκνότητα ρ θετικού φορτίου (κόκκινο χρώμα), που περικλείει μια μικρότερη σφαιρική, ηλεκτρικά ουδέτερη περιοχή (0, κίτρινο) ακτίνας R_1, με το κέντρο της μετατοπισμένο κατά $\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_x$.**(c)** Το κέντρο της σφαίρας που οριοθετεί την πυκνότητα θετικού φορτίου ρ των νανοσωματιδίων ιόντων Αργύρου συμπίπτει με την αρχή του Συστήματος Αναφοράς. Το κέντρο της σφαίρας που οριοθετεί την πυκνότητα αρνητικού φορτίου $-\rho$ (μπλε) έχει μετατοπιστεί κατά $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$, με $x_\mathrm{p} \ll R$. **(d)** Ένα εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίου $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$. Για χρονικά μεταβαλλόμενο $\boldsymbol{E}_0$, το ηλεκτρονιακό νέφος μετακινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$. **(e)** Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δοχείο $(h \times h \times a)$ που περιέχει το υδατικό διάλυμα των νανοσωματιδίων φωτισμένο από μονοχρωματική ακτινοβολία η οποία διαδίδεται κατά μήκος του z-άξονα με κυκλική συχνότητα ω_p και ένταση S.

Απλό σφαιρικό νανοσωματίδιο Αργύρου

Στο πρόβλημα αυτό, θεωρούμε ένα σφαιρικό νανοσωματίδιο Αργύρου ακτίνας $R = 10{,}0\ \mathrm{nm}$ με το κέντρο του τοποθετημένο στην αρχή του Συστήματος Αναφοράς, βλ. Εικ. 2.1(a). Όλες οι κινήσεις, οι δυνάμεις και τα πεδία δυνάμεων είναι παράλληλα προς τον οριζόντιο x-άξονα (με μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{e}_x$). Το νανοσωματίδιο περιέχει ελεύθερα ηλεκτρόνια (αγωγιμότητας), που κινούνται σε όλο τον όγκο του νανοσωματιδίου, χωρίς να είναι δέσμια σε κάποιο άτομο Αργύρου. Κάθε άτομο Αργύρου είναι ένα θετικό ιόν που έχει απελευθερώσει ένα τέτοιο ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

2.1	Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες: Τον όγκο V και τη μάζα M του νανοσωματιδίου, το πλήθος N και την πυκνότητα φορτίου ρ των ιόντων Αργύρου στο σωματίδιο, τη συγκέντρωση n των ελεύθερων ηλεκτρονίων, το συνολικό τους φορτίο Q, και τη συνολική τους μάζα m_0.	0,7

Το ηλεκτρικό πεδίο σε ηλεκτρικά ουδέτερη περιοχή που βρίσκεται εντός φορτισμένης σφαίρας

Στη συνέχεια του προβλήματος, υποθέστε ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά όλων των υλικών είναι $\varepsilon = 1$. Στο εσωτερικό σφαίρας σταθερής πυκνότητας φορτίου ρ και ακτίνας R δημιουργείται μια μικρή σφαιρική, ηλεκτρικά ουδέτερη περιοχή ακτίνας R_1 με την προσθήκη αντίθετης πυκνότητας φορτίου $-\rho$, το κέντρο της οποίας είναι μετατοπισμένο κατά $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}\, \boldsymbol{e}_x$ από το κέντρο της σφαίρας ακτίνας R, βλ. Εικ. 2.1(b).

2.2	Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της ηλεκτρικά ουδέτερης περιοχής είναι ομογενές και ότι έχει τη μορφή $\boldsymbol{E} = A\ (\rho/\varepsilon_0)\ \boldsymbol{x}_\mathrm{p}$. Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή A.	1,2

Η δύναμη επαναφοράς του μετατοπισμένου ηλεκτρονιακού νέφους

Στη συνέχεια, μελετάμε τη συνολική κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων, συνεπώς τα μοντελοποιούμε σαν μια μοναδική αρνητικά φορτισμένη σφαίρα ομογενούς πυκνότητας φορτίου $-\rho$, με το κέντρο της $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$, το οποίο μπορεί να κινηθεί κατά μήκος του x-άξονα ως προς το κέντρο της θετικά φορτισμένης σφαίρας (ιόντα Αργύρου) που βρίσκεται στην αρχή του Συστήματος Αναφοράς, βλ. Εικ. 2.1(c). Υποθέστε ότι μια εξωτερική δύναμη $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ μετατοπίζει το ηλεκτρονιακό νέφος σε μια νέα θέση ισορροπίας $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}\, \boldsymbol{e}_x$ όπου $|x_\mathrm{p}| \ll R$. Με την εξαίρεση ελαχιστότατων φορτίων στα αντίθετα άκρα του νανοσωματιδίου, το εσωτερικό παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερο.

2.3	Να γράψετε συναρτήσει του $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ και n τα ακόλουθα δύο φυσικά μεγέθη: τη δύναμη επαναφοράς $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο ηλεκτρονικό νέφος, και το έργο W_el που παράγεται στο ηλεκτρονικό νέφος κατά τη μετατόπισή του.	1,0

Το σφαιρικό νανοσωματίδιο αργύρου σε εξωτερικό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο

Το νανοσωματίδιο τοποθετείται σε κενό υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ λόγω ενός εφαρμοζόμενου στατικού ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$, το οποίο μετατοπίζει το ηλεκτρονικό νέφος κατά μικρή απόσταση $|x_\text{p}|$, όπου $|x_\text{p}| \ll R$.

2.4	Βρείτε τη μετατόπιση x_p του ηλεκτρονιακού νέφους σε συνάρτηση των E_0 και n, και προσδιορίστε την ποσότητα $-\Delta Q$ του ηλεκτρονιακού φορτίου που μετατοπίζεται μέσω του *yz*-επιπέδου στο κέντρο του νανοσωματιδίου σε συνάρτηση των n, R και x_p.	0,5

Η ισοδύναμη Χωρητικότητα και ο ισοδύναμος Συντελεστής Αυτεπαγωγής του νανοσωματιδίου Αργύρου

Τόσο το χρονικά σταθερό, όσο και το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}_0$, το νανοσωματίδιο μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα. Η ισοδύναμη χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί από το συσχετισμό του έργου W_el, που παράγεται κατά το διαχωρισμό των φορτίων ΔQ, προς την ενέργεια ενός πυκνωτή, φορτισμένου με φορτίο $\pm\Delta Q$. Ο διαχωρισμός φορτίων θα προκαλέσει την εμφάνιση μιας διαφοράς δυναμικού V_0 κατά μήκος του ισοδύναμου πυκνωτή.

2.5a	Γράψτε μια σχέση της ισοδύναμης χωρητικότητας *C* του συστήματος σε συνάρτηση με τα ε_0 και R, και υπολογίστε την τιμή της.	0,7
2.5b	Για αυτή την τιμή της χωρητικότητας, βρείτε μια σχέση με τα E_0 και R της ισοδύναμης διαφοράς δυναμικού V_0 που θα έπρεπε να συνδεθεί στον ισοδύναμο πυκνωτή, προκειμένου αυτός να φορτιστεί με φορτίο ΔQ.	0,4

Για ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο $\boldsymbol{E}_0$, το ηλεκτρονιακό νέφος κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v\ \boldsymbol{e}_x$, Εικ. 2.1(d). Έχει κινητική ενέργεια W_kin και συνιστά ένα ηλεκτρικό ρεύμα I που ρέει διαμέσου του ακίνητου *yz*-επιπέδου. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονιακού νέφους μπορεί να αντιστοιχιστεί στην ενέργεια ενός ισοδύναμου πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.

2.6a	Γράψτε τις σχέσεις των W_kin και I με την ταχύτητα v.	0,7
2.6b	Γράψτε τη σχέση του ισοδύναμου συντελεστή αυτεπαγωγής L με τη ακτίνα R του σωματιδίου, το φορτίου e και τη μάζα m_e του ηλεκτρονίου, καθώς και τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων n. Υπολογίστε την τιμή του L.	0,5

Ο Πλασμονικός Συντονισμός του νανοσωματιδίου Αργύρου

Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτει ότι η κίνηση που προκαλείται από τη μετατόπιση του ηλεκτρονιακού νέφους από τη θέση ισορροπίας του και τη μετέπειτα απελευθέρωσή του, μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα ιδανικό κύκλωμα LC που ταλαντώνεται σε συντονισμό. Αυτή η δυναμική κατάσταση του ηλεκτρονιακού νέφους είναι γνωστή ως Πλασμονικός Συντονισμός, που ταλαντώνεται στην αποκαλούμενη γωνιακή πλασμονική συχνότητα ω_p.

2.7a	Βρείτε μια έκφραση της γωνιακής πλασμονικής συχνότητας ω_p του ηλεκτρονιακού νέφους σε συνάρτηση με το φορτίο e και τη μάζα m_e του ηλεκτρονίου, την πυκνότητα ηλεκτρονίων n, και τη διηλεκτρική σταθερά ε_0.	0,5
2.7b	Υπολογίστε την ω_p σε rad/s και το μήκος κύματος λ_p σε nm, μιας φωτεινής ακτίνας που διαδίδεται στο κενό με $\omega = \omega_\mathrm{p}$.	0,4

Το νανοσωματίδιο Αργύρου όταν προσπίπτει σε αυτό φως με συχνότητα ίση με την πλασμονική

Στη συνέχεια του προβλήματος, το νανοσωματίδιο φωτίζεται με μονοχρωματικό φως με συχνότητα ίση προς τη γωνιακή πλασμονική συχνότητα ω_p και με προσπίπτουσα ένταση $S = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 1{,}00\ \mathrm{MW\,m^{-2}}$. Δεδομένου ότι το μήκος κύματος είναι μεγάλο, $\lambda_\mathrm{p} \gg R$, το νανοσωματίδιο μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται μέσα σε ομογενές αρμονικά ταλαντούμενο πεδίο $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\,\text{συν}(\omega_\mathrm{p} t)\,\boldsymbol{e}_x$. Εξ αιτίας του $\boldsymbol{E}_0$, το κέντρο $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}(t)$ του ηλεκτρονιακού νέφους ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα, με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$ και σταθερό πλάτος x_0. Αυτό το ταλαντούμενο ηλεκτρόνιο προκαλεί απορρόφηση του φωτός. Η ενέργεια που δεσμεύεται από το σωμάτιο είτε μετατρέπεται σε θερμότητα Joule στο εσωτερικό του σωματίου, ή επανεκπέμπεται από το σωμάτιο με τη μορφή διαχεόμενου φωτός.

Η θερμότητα Joule προκαλείται από τυχαίες ανελαστικές κρούσεις, κατά τη διάρκεια των οποίων οποιοδήποτε ηλεκτρόνιο συγκρούεται κάθε τόσο με ένα ιόν Αργύρου χάνοντας όλη την κινητική του ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε ταλαντώσεις των ιόντων αργύρου (θερμότητα). Ο μέσος χρόνος μεταξύ των κρούσεων είναι $\tau \gg 1/\omega_\mathrm{p}$, όπου για τα νανοσωματίδια Αργύρου χρησιμοποιούμε την τιμή $\tau = 5{,}24 \times 10^{-15}$ s.

2.8a	Βρείτε μια έκφραση για τη μέση τιμή (στο χρόνο) της ισχύος P_heat της θερμότητας Joule στο νανοσωματίδιο, καθώς και μέσης χρονικής τιμής των τετραγώνων του ρεύματος $\langle I^2 \rangle$, που να περιλαμβάνει εκπεφρασμένα τη μέση τιμή του τετραγώνου των ταχυτήτων $\langle v^2 \rangle$ του ηλεκτρονιακού νέφους.	1,0
2.8b	Βρείτε μια έκφραση της ισοδύναμης Ωμικής Αντίστασης R_heat ενός ισοδύναμου Μοντέλου Αντίστασης του νανοσωματιδίου που έχει την ισχύ P_heat της θερμότητας	0,8

	Joule λόγω του ρεύματος I του ηλεκτρονιακού νέφους. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της R_{heat}.	

Η προσπίπτουσα ακτίνα χάνει μέρος της μέσης ως προς το χρόνο ισχύος P_{scat} λόγω διάχυσης από το ταλαντούμενο ηλεκτρονιακό νέφος (επανεκπομπή). Η P_{scat} εξαρτάται από το πλάτος x_0 της πηγής διάχυσης, το φορτίο Q, τη γωνιακή συχνότητα ω_{p} και από ιδιότητες του φωτός (την ταχύτητα του φωτός c τη διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0). Με βάση τις τέσσερις αυτές μεταβλητές, η P_{scat} δίνεται από την $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_{\text{p}}{}^4}{12\pi\,\varepsilon_0 c^3}$.

2.9	Χρησιμοποιώντας την P_{scat}, βρείτε την έκφραση της ισοδύναμης Αντίστασης Διάχυσης R_{scat} (σε αναλογία με την R_{heat}) ενός ισοδύναμου Μοντέλου Αντίστασης, και υπολογίστε την τιμή της.	1,0

Τα στοιχεία του ανωτέρω ισοδύναμου κυκλώματος συνδυάζονται σε ένα μοντέλο κυκλώματος *LCR* του νανοσωματιδίου Αργύρου, που καθοδηγείται από μία αρμονικά ταλαντούμενη ισοδύναμη τάση $V = V_0$ συν$(\omega_{\text{p}} t)$, η οποία καθορίζεται από την ηλεκτρική συνιστώσα E_0 του προσπίπτοντος φωτός.

2.10a	Αποδείξτε τις εκφράσεις για τις μέσες κατά το χρόνο τιμές των απωλειών ισχύος P_{heat} και P_{scat}, σε συνάρτηση με το πλάτος E_0 της ηλεκτρικής συνιστώσας του προσπίπτοντος φωτός στον πλασμονικό συντονισμό.	1,2
2.10b	Υπολογίστε τις αριθμητικές τιμές των E_0, P_{heat}, και P_{scat}.	0,3

Παραγωγή ατμού από φως

Δημιουργούμε ένα υδατικό διάλυμα νανοσωματιδίων Αργύρου με συγκέντρωση $n_{\text{np}} = 7{,}3 \times 10^{15}\ \text{m}^{-3}$, το οποίο τοποθετούμε σε ένα διαφανές δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1{,}0\ \text{cm}^3$ και το φωτίζουμε με φως συχνότητας ίσης προς την πλασμονική, ίδιας έντασης $S = 1{,}00\ \text{MW}\ \text{m}^{-2}$ και κάθετης πρόσπτωσης, όπως προηγουμένως, βλ. Εικ. 2.1(e). Η θερμοκρασία του νερού είναι $T_{\text{wa}} = 20\ ^\circ\text{C}$ και υποθέτουμε, σε συμφωνία με τα πειραματικά ευρήματα, ότι στην κατάσταση ισορροπίας, όλη η θερμότητα Joule του νανοσωματιδίου χρησιμοποιείται για την παραγωγή ατμού σε θερμοκρασία $T_{\text{st}} = 110\ ^\circ\text{C}$, χωρίς να αυξάνεται η θερμοκρασία του νερού.

Ο συντελεστής θερμοδυναμικής απόδοσης η της γεννήτριας πλασμονικού ατμού ορίζεται από το λόγο ισχύων $\eta = P_{st}/P_{tot}$, όπου P_{st} είναι η ισχύς που χρησιμοποιείται για την παραγωγή ατμού σε όλο το δοχείο, ενώ P_{tot} είναι η συνολική ισχύς του φωτός που εισέρχεται στο δοχείο.

Για το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου κάθε νανοσωματίδιο περιβάλλεται από ατμό αντί από νερό, συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται στο κενό.

2.11a	Υπολογίστε την ολική μάζα ανά δευτερόλεπτο μ_{st} του ατμού που παράγεται από τη γεννήτρια κατά τη διάρκεια του φωτισμού με φως πλασμονικής συχνότητας και έντασης S.	0,6
2.11b	Υπολογίστες την αριθμητική τιμή του συντελεστή θερμοδυναμικής απόδοσης η της γεννήτριας πλασμονικού ατμού.	0,2

Φύλλο Απαντήσεων Κωδικός Χώρας (2 γράμματα) ☐ Αριθμός Μαθητή (1-5) ☐

2.1	Όγκος $V =$ Αριθμός $N =$ Συγκέντρωση $n =$ Μάζα ηλεκτρονιακού νέφους $m_0 =$	Μάζα $M =$ Πυκνότητα φορτίου $\rho =$ Φορτίο $Q =$	0,7
2.2	Αποδείξτε $\boldsymbol{E} = A\ (\rho/\varepsilon_0)\ \boldsymbol{x}_\mathrm{p}$, με συντελεστή $A =$		1,2
2.3	$\boldsymbol{F} =$	$W_\mathrm{el} =$	1,0
2.4	Μετατόπιση $x_\mathrm{p} =$	Μετατοπισμένο φορτίο $-\Delta Q =$	0,5
2.5a	Έκφραση $C =$	Τιμή $C =$	0,7
2.5b	Έκφραση $V_0 =$		0,4
2.6a	Έκφραση $W_\mathrm{kin} =$	Έκφραση $I =$	0,7
2.6b	Έκφραση $L =$	Τιμή $L =$	0,5
2.7a	Έκφραση $\omega_\mathrm{p} =$		0,5
2.7b	Τιμή $\omega_\mathrm{p} =$	Τιμή $\lambda_\mathrm{p} =$	0,4
2.8a	Έκφραση $P_\mathrm{heat} =$	Έκφραση $\langle I^2 \rangle =$	1,0
2.8b	Έκφραση $R_\mathrm{heat} =$	Τιμή $R_\mathrm{heat} =$	0,8
2.9	Έκφραση $R_\mathrm{scat} =$	Τιμή $R_\mathrm{scat} =$	1,0
2.10a	Έκφραση $P_\mathrm{heat} =$	Έκφραση $P_\mathrm{scat} =$	1,2
2.10b	Τιμές: $E_0 =$, $P_\mathrm{heat} =$	, $P_\mathrm{scat} =$	0,3

2.11a	Τιμή μ_{st} =	0,6
2.11b	Τιμή $\eta = P_{st}/P_{tot}$ =	0,2

	Σύνολο	**12,0**

Solutions

A single spherical silver nanoparticle

2.1	Volume of the nanoparticle: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19 \times 10^{-24}\ \mathrm{m}^3$. Mass of nanoparticles: $M = V\,\rho_{\mathrm{Ag}} = 4.39 \times 10^{-20}$ kg Number of ions: $N = N_A \frac{M}{M_{\mathrm{Ag}}} = 2.45 \times 10^5$. Charge density $\rho = \frac{eN}{V} = 9.38 \times 10^9\ \mathrm{C\,m^{-3}}$ Electron concentration $n = \frac{N}{V} = 5.85 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$, so charge density $\rho = en$ Total charge of free electrons $Q = eN = 3.93 \times 10^{-14}$ C, Total mass of free electrons $m_0 = m_e N = 2.23 \times 10^{-25}$ kg.	0.7

The electric field in a charge-neutral region inside a charged sphere

2.2	For a sphere with radius R and constant charge density ρ, for any point inside the sphere designated by radius-vector $\mathbf{r} = r\boldsymbol{e}_r$ $(r < R)$ Gauss's law yields directly $4\pi r^2 \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_+ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, \boldsymbol{e}_r$, where $\boldsymbol{e}_r$ is the unit radial vector pointing away from the center of the sphere. Thus, $\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$. Likewise, inside another sphere of radius R_1 and charge density $-\rho$ the field is $\boldsymbol{E}_- = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}'$, where $\boldsymbol{r}'$ is the radius-vector of the point in the coordinate system with the origin in the center of this sphere. Merging the two charge configurations gives the setup we want with $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_d$. So inside the charge-free region $\lvert \boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} \rvert < R_1$ the field is $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_d)$ or $\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_d$ with the pre-factor $A = \frac{1}{3}$	1.2

The restoring force on the displaced electron cloud

2.3	With $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = x_{\mathrm{p}}\,\boldsymbol{e}_x$ and $x_{\mathrm{p}} \ll R$ we have from above that approximately the filed induced inside the particle is $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$. The number of electrons that produced $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}$ is negligibly smaller than the number of electrons inside the particle, so $\boldsymbol{F} \cong Q\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}} = (-eN)\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = -\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3 e^2 n^2\, x_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e}_x$ (like for a harmonic oscillator). The work done on the electrons to shift the electron cloud is $W_{\mathrm{el}} = -\int_0^{x_{\mathrm{p}}} F(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3 e^2 n^2\right)x_{\mathrm{p}}^2$	1.0

The spherical silver nanoparticle in an external constant electric field

2.4	Inside the metallic particle in the steady state the electric field must be equal to 0. The induced field (from 2.2 or 2.3) compensates the external field: $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$, so $x_{\text{p}} = \frac{3\varepsilon_0}{\rho} E_0 = \frac{3\varepsilon_0}{en} E_0$. Charge displaced through the yz-plane is the total charge of electrons in the cylinder of radius R and height x_p: $-\Delta Q = -\rho\, \pi R^2 x_{\text{p}} = -\pi R^2\, ne\, x_{\text{p}}$.	0.5

The equivalent capacitance and inductance of the silver nanoparticle

2.5a	The electric energy W_{el} of a capacitor with capacitance C holding charges $\pm\Delta Q$ is $W_{\text{el}} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$. The energy of such capacitor is equal to the work (see 2.3) done to separate the charges (see 2.4), thus $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{el}} = \frac{9}{4}\varepsilon_0 \pi R = 6.26 \times 10^{-19}$ F.	0.7
2.5b	Equivalent scheme for a capacitor reads: $\Delta Q = CV_0$. Combining charge from (2.4) and capacitance from (2.5a) gives $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3} R\, E_0$.	0.4

2.6a	The kinetic energy of the electron cloud is defined as the kinetic energy of one electron multiplied by the number of electrons in the cloud $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 N = \frac{1}{2} m_e v^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\, n\right)$. The current I is the charge of electrons in the cylinder of area πR^2 and height $v\Delta t$ divided by time Δt, thus $I = -e\; nv\, \pi R^2$.	0.7
2.6b	The energy carried by current I in the equivalent circuit with inductance L is $W = \frac{1}{2} L\, I^2$ is, in fact, the kinetic energy of electrons W_{kin}. Taking the energy and current from (2.6a) results $L = \frac{4\, m_e}{3\pi R n e^2} = 2.57 \times 10^{-14}$ H.	0.5

The plasmon resonance of the silver nanoparticle

2.7a	From the LC-circuit analogy we can directly derive $\omega_p = (LC)^{-1/2} = \sqrt{ne^2/3\varepsilon_0 m_e}$. Alternatively it is possible to use the harmonic law of motion in (2.3) and get the same result for the frequency	0.5
2.7b	$\omega_{\text{p}} = 7.88 \times 10^{15}$ rad/s, for light with angular frequency $\omega = \omega_{\text{p}}$ wavelength is $\lambda_{\text{p}} = 2\pi c/\omega_{\text{p}} = 239$ nm.	0.4

The silver nanoparticle illuminated with light at the plasmon frequency

2.8a	The velocity of an electron $v=\frac{dx}{dt}=-\omega x_0 \sin\omega t = v_0 \sin\omega t$. For harmonic motion it is enough to average over period of oscillations. The time-averaged kinetic energy on the electron $\langle W_k\rangle = \langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{m_e}{2}\langle v^2\rangle$. During time t_0 each electron hits the ions t_0/τ times. So The energy lost in the whole nanoparticle during one period of oscillations is $W_{heat}=N\langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{4}{3}\pi R^3 n\langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle$. Time-averaged Joule heating power $P_{\text{heat}}=\frac{1}{\tau}W_{\text{kin}}=\frac{1}{2\tau}m_e\langle v^2\rangle\left(\frac{4}{3}\pi R^3 n\right)$. The expression for current is taken from (2.6a), squared and averaged $\langle I^2\rangle = (en\,\pi R^2)^2\langle v^2\rangle = \left(\frac{3Q}{4R}\right)^2\langle v^2\rangle$.	1.0
2.8b	The oscillating current $I=I_0\sin\omega t=\pi R^2 n e v_0 \sin\omega t$ produces the heat in the resistance R_{heat} equal to $P_{\text{heat}}=R_{heat}\langle I^2\rangle$, what together with results from (2.8a) leads to $R_{\text{heat}}=\frac{W_{\text{kin}}}{\tau I^2}=\frac{2\,m_e}{3\pi n e^2 R\tau}=2.46\ \Omega$.	0.8

2.9	$R_{\text{scat}}=\frac{P_{\text{scat}}}{\langle I^2\rangle}$ and $\langle v^2\rangle=\frac{1}{2}\omega_{\text{p}}^2 x_0^2$ yields $R_{\text{scat}}=\frac{Q^2 x_0^2\omega_{\text{p}}^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{16R^2}{9Q^2\langle v^2\rangle}=\frac{8\omega_0^2 R^2}{27\pi\varepsilon_0 c^3}=2.45\ \Omega$.	1.0

2.10a	Ohm's law for a *LCR* serious circuit is $I_0=\frac{V_0}{\sqrt{(R_{heat}+R_{scat})^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. At the resonance frequency time-averaged voltage squared is $\langle V^2\rangle = Z_R^2\langle I^2\rangle=(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2\langle I^2\rangle$. And from (2.5b) $\langle V^2\rangle=\frac{1}{2}V_0^2=\frac{8}{9}R^2E_0^2$, so Ohm's law results in $\langle I^2\rangle=\frac{8R^2E_0^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}$. Now time-averaged power loses are $P_{\text{heat}}=R_{\text{heat}}\langle I^2\rangle=\frac{8R_{\text{heat}}R^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}E_0^2$ and $P_{\text{scat}}=\frac{8R_{\text{scat}}R^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}E_0^2=\frac{R_{\text{scat}}}{R_{\text{heat}}}\langle P_{\text{heat}}\rangle$.	1.2
2.10b	Starting with the electric field amplitude $E_0=\sqrt{2S/(\varepsilon_0 c)}=27.4\ \text{kV/m}$, we calculate $P_{\text{heat}}=6.82\ \text{nW}$ and $P_{\text{scat}}=6.81\ \text{nW}$.	0.3

Steam generation by light

2.11a	Total number of nanoparticles in the vessel: $N_{np} = h^2 a\, n_{np} = 7.3 \times 10^{11}$. Then the total time-averaged Joule heating power: $P_{st} = N_{np} P_{heat} = 4.98$ kW. This power goes into the steam generation: $P_{st} = \mu_{st} L_{tot}$, with $L_{tot} = c_{wa}(T_{100} - T_{wa}) + L_{wa} + c_{st}(T_{st} - T_{100}) = 2.62 \times 10^6$ J kg^{-1}. Thus the mass of steam produced in second μ_{st}: $\mu_{st} = \frac{P_{st}}{L_{tot}} = 1.90 \times 10^{-3}$ kg s^{-1}.	0.6
2.11b	The power of light incident on the vessel $P_{tot} = h^2 S = 0.01\text{m}^2 \times 1$ MW m^{-2} $= 10.0$ kW, and the power directed for steam production by nanoparticles is given in 2.11a. Thus $\eta = \frac{P_{st}}{P_{tot}} = \frac{4.98\text{ kW}}{10.0\text{ kW}} = 0.498$.	0.2

	Total	**12.0**