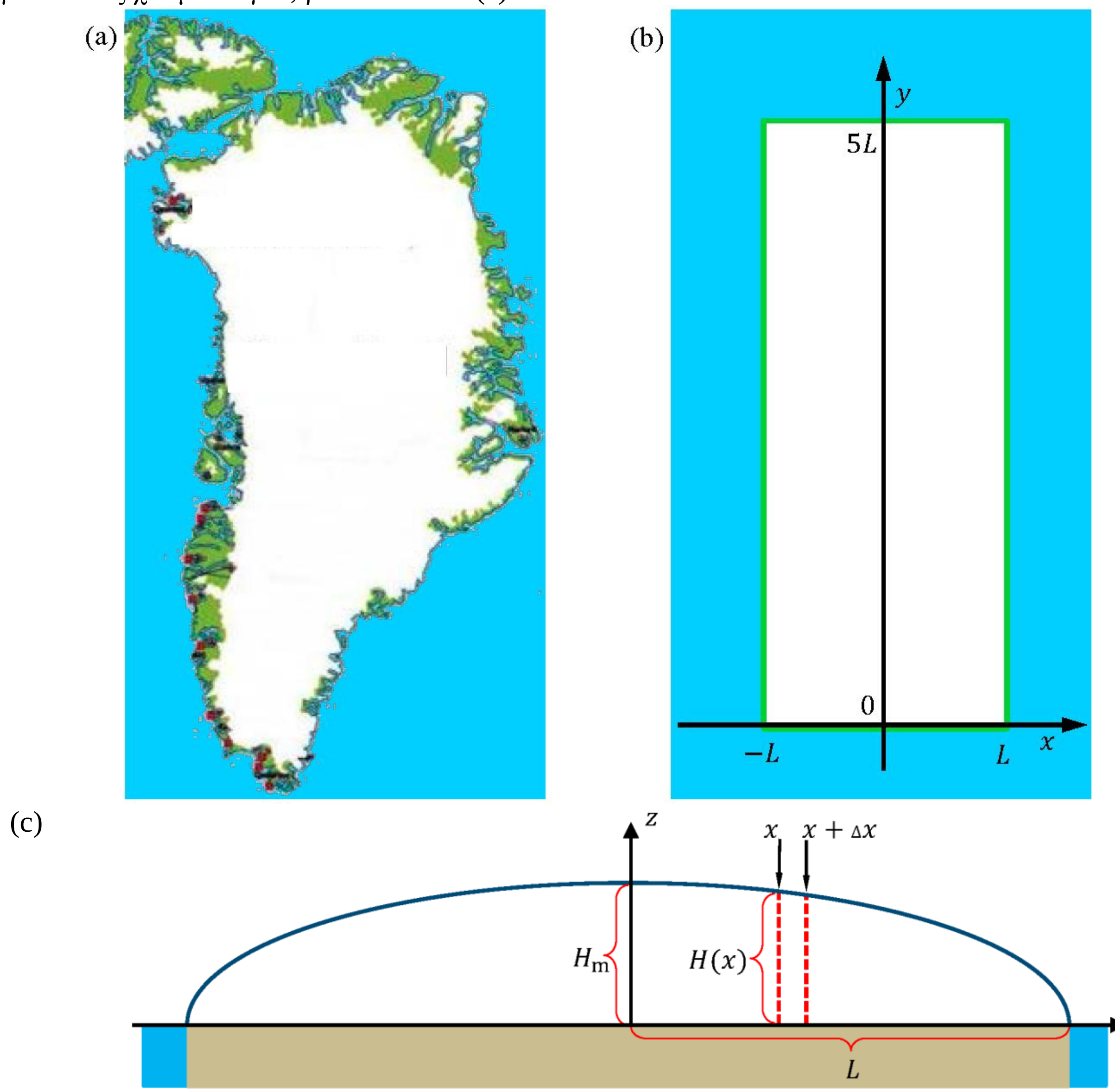
Εισαγωγή

Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται με τη φυσική ενός στρώματος πάγου στη Γροιλανδία, το δεύτερο μεγαλύτερο παγετώνα στον κόσμο, Εικ. 3.1(a). Για εξιδανίκευση, μοντελοποιούμε τη Γροιλανδία ως ένα νησί σχήματος ορθογωνίου με πλάτος $2L$ και μήκος $5L$ με την επιφάνεια του εδάφους να βρίσκεται στο επίπεδο της θάλασσας και να καλύπτεται πλήρως με ασυμπίεστο πάγο (σταθερή πυκνότητα ρ_{ice}), βλέπε Εικ. 3.1(b). Το ύψος της εγκάρσιας τομής του στρώματος του πάγου $H(x)$ δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη y και αυξάνεται από την τιμή μηδέν στις ακτές, $x = \pm L$, σε ένα μέγιστο ύψος H_{m} κατά μήκος της διεύθυνσης βορράς-νότος (άξονας y), στο μέσο του άξονα x, γνωστό ως χάσμα πάγου, βλέπε Εικ. 3.1(c).



Εικόνα 3.1 (a) Χάρτης της Γροιλανδίας που δείχνει την έκταση του στρώματος πάγου (άσπρο), τις ακτές χωρίς πάγο (πράσινο), και τον περιβάλλοντα ωκεανό (μπλε). **(b)** Η χονδροειδής μοντελοποίηση του στρώματος πάγου της Γροιλανδίας ως ορθογώνιο που καλύπτει το επίπεδο xy με πλάτος $2L$ και μήκος $5L$.

Το χάσμα πάγου, η γραμμή του μέγιστου ύψους του στρώματος πάγου H_m κατά μήκος του άξονα y. **(c)** Εγκάρσια τομή (επίπεδο xz) του στρώματος πάγου που δείχνει το ύψος $H(x)$ (μπλε γραμμή). Το ύψος $H(x)$ είναι ανεξάρτητο της συντεταγμένης y για $0 < y < 5L$, το οποίο πέφτει απότομα στο μηδέν για $y = 0$ και $y = 5L$. Ο άξονας z σηματοδοτεί το χάσμα πάγου. Για ευκρίνεια, οι κάθετες διαστάσεις έχουν αυξηθεί εκτός κλίμακας σε σχέση με τις οριζόντιες διαστάσεις. Η πυκνότητα ρ_ice του πάγου είναι σταθερή.

Δύο Χρήσιμες σχέσεις

Σε αυτό το πρόβλημα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

Και την προσέγγιση $(1+x)^a \approx 1 + ax$, που ισχύει για $|ax| \ll 1$.

Το ύψος της εγκάρσιας τομής του στρώματος πάγου

Θεωρήστε ότι για μικρά χρονικά διαστήματα ο παγετώνας είναι ένα ασυμπίεστο υδροστατικό σύστημα με σταθερό ύψος εγκάρσιας τομής $H(x)$.

3.1	Να γράψετε τη σχέση για την πίεση $p(x,z)$ μέσα στο στρώμα του πάγου συναρτήσει του κάθετου ύψους z πάνω από την επιφάνεια του εδάφους και της απόστασης x από το χάσμα πάγου. Αγνοήστε την ατμοσφαιρική πίεση.	0,3

Θεωρήστε μια κατακόρυφη πλάκα του στρώματος πάγου σε ισορροπία, που καλύπτει μια μικρή οριζόντια επιφάνεια με εμβαδόν βάσης $\Delta x \Delta y$ μεταξύ x και $x + \Delta x$, βλέπε τις κόκκινες διακεκομμένες γραμμές στην Εικ. 3.1(c). Το μέγεθος του Δy δεν έχει καμιά σημασία. Η ολική οριζόντια συνιστώσα ΔF της δύναμη στις δύο κάθετες πλευρές της πλάκας, που δημιουργείται από τη διαφορά ύψους ανάμεσα στο κέντρο και στην άκρης της πλευράς, εξουδετερώνεται από μια δύναμη τριβής $\Delta F = S_\mathrm{b}\, \Delta x \Delta y$ από το έδαφος στη βάση του εμβαδού $\Delta x \Delta y$, όπου S_b ονομάζεται επιφανειακή τάση $S_\mathrm{b} = 100\ \mathrm{kPa}$.

3.2a	Για δεδομένη τιμή του x, δείξτε ότι στο όριο $\Delta x \to 0$, $S_\mathrm{b} = kH\, \mathrm{d}H/\mathrm{d}x$, και υπολογίστε το k.	0,9
3.2b	Να γράψετε μια σχέση για το ύψος $H(x)$ συναρτήσει των μεγεθών ρ_ice, g, L, S_b και της απόστασης x από το χάσμα πάγου. Το αποτέλεσμα θα δείξει, ότι το μέγιστο ύψος του παγετώνα H_m είναι ανάλογο της ρίζας του L, $H_\mathrm{m} \propto L^{1/2}$.	0,8
3.2c	Ο ολικός όγκος V_ice του στρώματος πάγου σχετίζεται με το εμβαδό A του ορθογωνίου νησιού με μια σχέση της μορφής $V_\mathrm{ice} \propto A^\gamma$. Να προσδιορίσετε τον εκθέτη γ.	0,5

Ένα δυναμικό στρώμα πάγου

Σε μεγαλύτερες κλίμακες χρόνου, ο πάγος είναι ένα παχύρευστο ασυμπίεστο υγρό, το οποίο, λόγω της βαρύτητας, ρέει από το κέντρο προς τις ακτές. Σε αυτό το μοντέλο, ο πάγος διατηρεί το ύψος του $H(x)$ σε μια σταθερή τιμή, όπου η συσσώρευση πάγου από την πτώση χιονιού στο κέντρο ισορροπεί το λιώσιμο των πάγων στις ακτές. Επιπρόσθετα της γεωμετρίας του στρώματος πάγου των εικόνων 3.1(b) και (c) να κάνετε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1) Ο πάγος ρέει στο επίπεδο xz μακριά από το χάσμα πάγου (άξονας y).
2) Ο ρυθμός συσσώρευσης c (m/year) στην κεντρική περιοχή είναι σταθερός.
3) Πάγος διαφεύγει από τον παγετώνα με το λιώσιμό του κοντά στις ακτές όπου $x = \pm L$.
4) Η οριζόντια x συνιστώσα της ταχύτητας ροής του πάγου $v_x(x) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ είναι ανεξάρτητη του z.
5) Η κάθετη z συνιστώσα της ταχύτητας ροής του πάγου $v_z(z) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ είναι ανεξάρτητη του x.

Θεωρήστε μόνο την κεντρική περιοχή $|x| \ll L$ κοντά στη μέση του στρώματος πάγου, όπου οι μεταβολές του ύψους του στρώματος πάγου είναι πολύ μικρές και μπορούν να αγνοηθούν, δηλαδή $H(x) \approx H_{\mathrm{m}}$.

3.3	Να χρησιμοποιήσετε τη διατήρηση της μάζας για να βρείτε τη σχέση για την οριζόντια ταχύτητα ροής $v_x(x)$ συναρτήσει των μεγεθών c, x, και H_{m}.	0,6

Θεωρώντας ότι η πυκνότητα του πάγου είναι σταθερή ρ_{ice}, δηλαδή ότι είναι ασυμπίεστος, και από τη διατήρηση της μάζας προκύπτει ότι ικανοποιείται η σχέση για τις συνιστώσες της ταχύτητας ροής:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Να γράψετε τη σχέση για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ροής του πάγου $v_z(z)$ σε συνάρτηση του z.	0,6

Ένα μικρό σωματίδιο πάγου με αρχικές συντεταγμένες θέσεις $(x_i, H(x_i))$ θα κινηθεί, όσο περνά ο χρόνος, ως μέρος του στρώματος πάγου, κατά μήκος της τροχιάς ροής $z(x)$ στο κατακόρυφο επίπεδο xz.

3.5	Να εξάγετε μια σχέση της τροχιάς ροής $z(x)$.	0,9

Δείκτες ηλικίας και κλίματος στο δυναμικό στρώμα πάγου

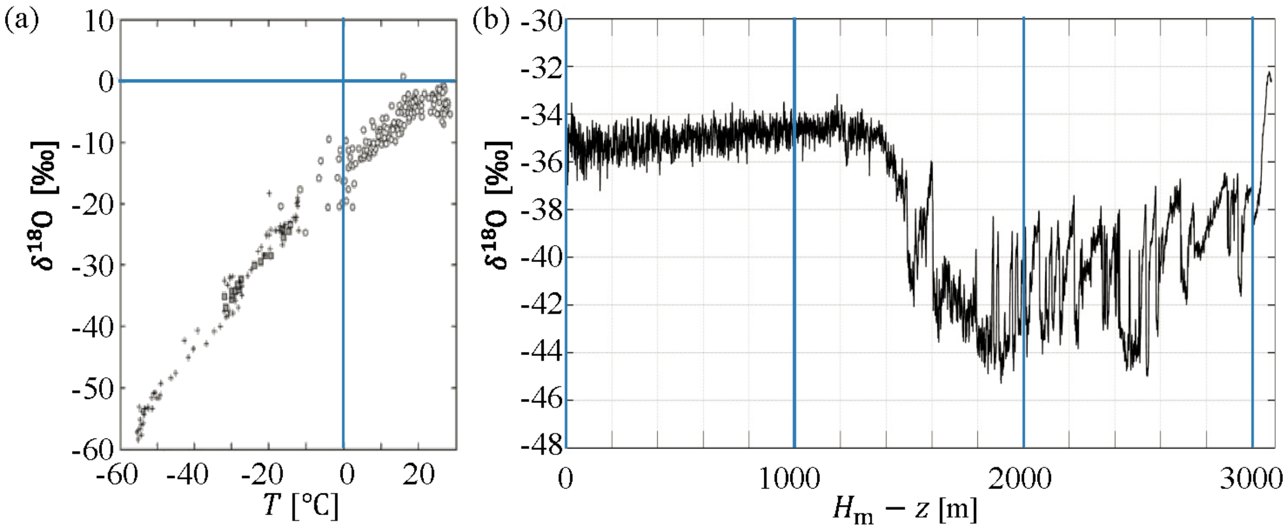
Βασισμένοι στις συνιστώσες $v_x(x)$ και $v_z(z)$ της ταχύτητας ροής του πάγου, μπορούμε να εκτιμήσουμε την ηλικία $\tau(z)$ του πάγου σε συγκεκριμένο βάθος $H_{\mathrm{m}} - z$ από την επιφάνεια του στρώματος πάγου.

3.6	Γράψτε την έκφραση της ηλικίας $\tau(z)$ του πάγου ως συνάρτηση του ύψους z πάνω από το έδαφος, ακριβώς στο σημείο χάσματος του πάγου $x = 0$.	1,0

Εξορύσσοντας ένα πυρήνα πάγου από το εσωτερικό του Γροιλανδικού στρώματος πάγου, διαπερνούμε τα στρώματα χιονιού του παρελθόντος. Αναλύοντας τον πυρήνα αποκαλύπτουμε προηγούμενες κλιματικές αλλαγές. Ένα από τους καλύτερους δείκτες είναι ο αποκαλούμενος $\delta^{18}\mathrm{O}$, που ορίζεται ως:

$$\delta^{18}\mathrm{O} = \frac{R_{\mathrm{ice}} - R_{\mathrm{ref}}}{R_{\mathrm{ref}}} 1000\ ‰,$$

όπου ο όρος $R = [^{18}\mathrm{O}]/[^{16}\mathrm{O}]$ δηλώνει τη σχετική αφθονία των δύο σταθερών ισότοπων οξυγόνου $^{18}\mathrm{O}$ και $^{16}\mathrm{O}$. Η αναφορά R_{ref} βασίζεται στην ισοτοπική σύνθεση των ωκεανών γύρω από τον Ισημερινό.



Εικ. 3.2 (a) Παρατηρούμενη συσχέτιση μεταξύ του $\delta^{18}\mathrm{O}$ στο χιόνι ως προς τη μέση ετήσια θερμοκρασία εδάφους T. **(b)** Μετρήσεις του $\delta^{18}\mathrm{O}$ ως προς το βάθος $H_{\mathrm{m}} - z$ από την επιφάνεια, που λήφθηκαν από πυρήνα πάγου από την επιφάνεια έως το εδαφικό υπόβαθρο σε συγκριμένη τοποθεσία κατά μήκος του Γροιλανδικού χάσματος πάγου, όπου $H_{\mathrm{m}} = 3.060$ m.

Παρατηρήσεις του Γροιλανδικού Φύλλου Πάγου δείχνουν ότι το $\delta^{18}\mathrm{O}$ στο χιόνι κατά προσέγγιση μεταβάλλεται γραμμικά με τη θερμοκρασία, Εικ. 3.2(a). Υποθέτοντας ότι αυτό ίσχυε ανέκαθεν, το $\delta^{18}\mathrm{O}$ που λαμβάνεται από ένα πυρήνα πάγου σε βάθος $H_{\mathrm{m}} - z$ οδηγεί σε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας T κοντά στη Γροιλανδία σε ηλικία $\tau(z)$.

Μετρήσεις του $\delta^{18}\mathrm{O}$ σε ένα πυρήνα πάγου μήκους 3060 m δείχνουν μια απότομη αλλαγή του $\delta^{18}\mathrm{O}$ σε βάθος 1492 m, Εικ. 3.2(b), σημειώνοντας το τέλος της τελευταίας εποχής παγετώνων. Η εποχή των παγετώνων ξεκίνησε 120.000 χρόνια πριν, αντιστοιχώντας σε βάθος 3.040 m, και η τρέχουσα μεσοπαγετωνική εποχή ξεκίνησε πριν από 11.700 χρόνια, αντιστοιχιζόμενη σε βάθος 1.492 m. Υποθέστε ότι αυτές οι δύο περίοδοι μπορούν να περιγραφούν από δύο διαφορετικούς ρυθμούς συσσώρευσης, c_{ia} (εποχή των παγετώνων) και c_{ig} (μεσοπαγετωνική εποχή), αντίστοιχα.

3.7a	Υπολογίστε τους ρυθμούς συγκέντρωσης c_{ia} και c_{ig}.	0,8

3.7b	Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα της Εικ. 3.2 για να βρείτε την αλλαγή θερμοκρασίας κατά τη μετάβαση από την εποχή των παγετώνων στη μεσοπαγετωνική εποχή.	0,2

Ανύψωση του επιπέδου της θάλασσας από τη τήξη του Γροιλανδικού Στρώματος Πάγου

Η πλήρης τήξη του Γροιλανδικού Στρώματος Πάγου θα προκαλέσει μια παγκόσμια άνοδο της θαλάσσιας στάθμης. Σε μια χονδροειδή προσέγγιση αυτής της ανόδου, μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοιόμορφη ανύψωση όλων των ωκεανών εμβαδού ίσου προς $A_\mathrm{O} = 3{,}61 \times 10^{14}\ \mathrm{m}^2$.

3.8	Υπολογίστε τη μέση παγκόσμια άνοδο της θαλάσσιας στάθμης, που θα προκύψει από την πλήρη τήξη του Γροιλανδικού Στρώματος Πάγου, δεδομένης της σημερινής επιφάνειας $A_\mathrm{G} = 1{,}71 \times 10^{12}\mathrm{m}^2$ και $S_\mathrm{b} = 100\ \mathrm{kPa}$.	0,6

Το τεράστιο Γροιλανδικό Στρώμα Πάγου ασκεί μια βαρυτική έλξη στον γύρω ωκεανό. Αν το Στρώμα λιώσει, η τοπική πλημμυρίδα θα χαθεί και η στάθμη της θάλασσας θα χαμηλώσει σε περιοχές κοντά στη Γροιλανδία, φαινόμενο που μερικώς αντισταθμίζει την άνοδο της στάθμης που υπολογίστηκε νωρίτερα.
Για την εκτίμηση αυτής της βαρυτικής έλξης στο νερό, το Γροιλανδικό Στρώμα Πάγου μοντελοποιείται τώρα σαν μια σημειακή μάζα πάγου τοποθετημένη στο επίπεδο του εδάφους, και μάζα ίση προς τη συνολική μάζα του Γροιλανδικού Στρώματος Πάγου. Η Κοπεγχάγη βρίσκεται σε απόσταση 3.500 km κατά μήκος της επιφάνειας της Γης από τη σημειακή μάζα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη, χωρίς τη σημειακή μάζα, είναι σφαιρικά συμμετρική και ότι ο ωκεανός καλύπτει όλη την επιφάνειά της με εμβαδό $A_\mathrm{E} = 5{,}10 \times 10^{14}\mathrm{m}^2$. Μπορείτε να αγνοήσετε όλα τα φαινόμενα που προκύπτουν από την περιστροφή της γύρω από τον εαυτό της.

3.9	Βάσει του μοντέλου αυτού, υπολογίστε τη διαφορά $h_\mathrm{CPH} - h_\mathrm{OPP}$ ανάμεσα στη στάθμη της θάλασσας στην Κοπεγχάγη (h_CPH) και εκείνης σε σημείο διαμετρικά αντίθετο της Γροιλανδίας (h_OPP).	1,8

Φύλλο Απαντήσεων Κωδικός Χώρας (2 γράμματα) ☐ Αριθμός Μαθητή (1-5) ☐

3.1	$p(x,z) =$	0,3

3.2a	$k =$	0,9
3.2b	$H(x) =$	0,8
3.2c	$\gamma =$	0,5

3.3	$v_x(x) =$	0,6
3.4	$v_z(z) =$	0,6
3.5	$z(x) =$	0,9
3.6	Ηλικία του πάγου σε δεδομένη απόσταση πάνω από το έδαφος: $\tau(z) =$	1,0
3.7a	$c_{\mathrm{ia}} =$ $\qquad$ $c_{\mathrm{ig}} =$	0,8
3.7b	$\Delta T =$	0,2
3.8	Παγκόσμια άνοδος της θαλάσσιας στάθμης εξ αιτίας της τήξης του Γροιλανδικού πάγου =	0,6
3.9	Διαφορά επιπέδων θάλασσας: $h_{\mathrm{CPH}} - h_{\mathrm{OPP}} =$	1,8
	Σύνολο	**9,0**

Solutions

3.1	The pressure is given by the hydrostatic pressure $p(x,z) = \rho_{\text{ice}} g(H(x) - z)$, which is zero at the surface.	0.3

3.2a	The outward force on a vertical slice at a distance x from the middle and of a given width Δy is obtained by integrating up the pressure times the area: $$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}}\, g\, (H(x) - z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\, \Delta y\, \rho_{\text{ice}}\, g\, H(x)^2$$ which implies that $\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\Delta x = -\Delta y\, \rho_{\text{ice}}\, g\, H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\Delta x$. This finally shows that $$S_{\text{b}} = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\, \rho_{\text{ice}}\, g\, H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$ Notice the sign, which must be like this, since S_b was defined as positive and $H(x)$ is a decreasing function of x.	0.9
3.2b	To find the height profile, we solve the differential equation for $H(x)$: $$-\frac{S_{\text{b}}}{\rho_{\text{ice}}\, g} = H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)^2$$ with the boundary condition that $H(L) = 0$. This gives the solution: $$H(x) = \sqrt{\frac{2S_bL}{\rho_{\text{ice}}\, g}}\sqrt{1 - x/L}$$ Which gives the maximum height $H_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2S_bL}{\rho_{\text{ice}}\, g}}$. Alternatively, dimensional analysis could be used in the following manner. First notice that $\mathcal{L} = [H_{\text{m}}] = [\rho_{\text{ice}}^{\alpha}\, g^{\beta} \tau_{\text{b}}^{\gamma} L^{\delta}]$. Using that $[\rho_{\rho_{\text{ice}}}] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$, $[\tau_b] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$, demands that $\mathcal{L} = [H_{\text{m}}] = [{\rho_i}^{\alpha} g^{\beta} {\tau_b}^{\gamma} L^{\delta}] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma}\mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta}\,\mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$, which again implies $\alpha + \gamma = 0,\ -3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1,\ 2\beta + 2\gamma = 0$. These three equations are solved to give $\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$, which shows that $$H_{\text{m}} \propto \left(\frac{S_{\text{b}}}{\rho_{\rho_{\text{ice}}} g}\right)^{\gamma} L^{1-\gamma}$$	0.8

	Since we were informed that $H_{\mathrm{m}} \propto \sqrt{L}$, it follows that $\gamma = 1/2$. With the boundary condition $H(L) = 0$, the solution then take the form $H(x) \propto \left(\frac{S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g}\right)^{1/2} \sqrt{L - x}$ The proportionality constant of $\sqrt{2}$ cannot be determined in this approach.	
3.2c	For the rectangular Greenland model, the area is equal to $A = 10L^2$ and the volume is found by integrating up the height profile found in problem 3.2b: $V_{\mathrm{G,ice}} = (5L)2\int_0^L H(x)\,\mathrm{d}x = 10L\int_0^L \left(\frac{\tau_{\mathrm{b}}\, L}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g}\right)^{1/2} \sqrt{1 - x/L}\,\mathrm{d}x = 10H_{\mathrm{m}}L^2 \int_0^1 \sqrt{1-\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{x}$ $= 10H_{\mathrm{m}}L^2\left[-\frac{2}{3}(1-\tilde{x})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{20}{3}H_{\mathrm{m}}L^2 \propto L^{5/2}$, where the last line follows from the fact that $H_{\mathrm{m}} \propto \sqrt{L}$. Note that the integral need not be carried out to find the scaling with L. This implies that $V_{\mathrm{G,ice}} \propto A_G{}^{5/4}$ and the wanted exponent is $\gamma = 5/4$.	0.5

3.3	According to the assumption of constant accumulation c the total mass accumulation rate from an area of width Δy between the ice divide at $x = 0$ and some point at $x > 0$ must equal the total mass flux through the corresponding vertical cross section at x. That is: $\rho c x \Delta y = \rho \Delta y H_{\mathrm{m}} v_x(x)$, from which the velocity is isolated: $v_x(x) = \frac{cx}{H_{\mathrm{m}}}$	0.6

3.4	From the given relation of incompressibility it follows that $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{c}{H_{\mathrm{m}}}$ Solving this differential equation with the initial condition $v_z(0) = 0$, shows that: $v_z(z) = -\frac{cz}{H_{\mathrm{m}}}$	0.6

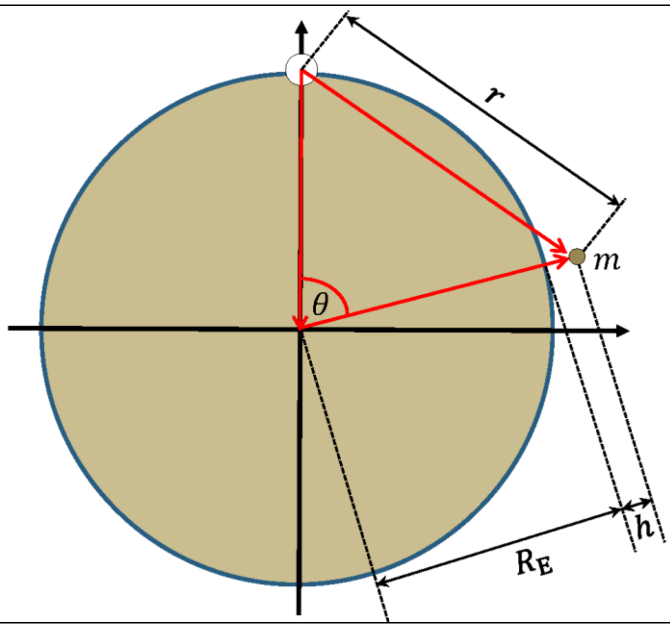
3.5	Solving the two differential equations $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{cz}{H_\mathrm{m}}$ and $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{cx}{H_\mathrm{m}}$ with the initial conditions that $z(0) = H_\mathrm{m}$, and $x(0) = x_i$ gives $z(t) = H_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{-ct/H_\mathrm{m}}$ and $x(t) = x_i\, \mathrm{e}^{ct/H_\mathrm{m}}$ This shows that $z = H_\mathrm{m}\, x_i\, /x$, meaning that flow lines are hyperbolas in the xz-plane. Rather than solving the differential equations, one can also use them to show that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xz) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{cx}{H_\mathrm{m}}z - x\frac{cz}{H_\mathrm{m}} = 0$ which again implies that $xz = \mathrm{const}$. Fixing the constant by the initial conditions, again leads to the result that $z = H_\mathrm{m}x_i/x$.	0.9

3.6	At the ice divide, $x = 0$, the flow will be completely vertical, and the t-dependence of z found in 3.5 can be inverted to find $\tau(z)$. One finds that $\tau(z) = \frac{H_\mathrm{m}}{c}\ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{z}\right)$.	1.0

3.7a	The present interglacial period extends to a depth of 1492 m, corresponding to 11,700 year. Using the formula for $\tau(z)$from problem 3.6, one finds the following accumulation rate for the interglacial: $c_\mathrm{ig} = \frac{H_\mathrm{m}}{11{,}700\ \mathrm{years}}\ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{H_\mathrm{m} - 1492\ \mathrm{m}}\right) = 0.1749\ \mathrm{m/year}.$ The beginning of the ice age 120,000 years ago is identified as the drop in $\delta^{18}\mathrm{O}$ in figure 3.2b at a depth of 3040 m. Using the vertical flow velocity found in problem 3.4, on has $\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{c}{H_\mathrm{m}}\mathrm{d}t$, which can be integrated down to a depth of 3040 m, using a stepwise constant accumulation rate: $H_\mathrm{m}\ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{H_\mathrm{m} - 3040\ \mathrm{m}}\right) = -H_\mathrm{m}\int_{H_\mathrm{m}}^{H_\mathrm{m}-3040\ \mathrm{m}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$ $= \int_{11{,}700\ \mathrm{year}}^{120{,}000\ \mathrm{year}} c_\mathrm{ia}\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{11{,}700\ \mathrm{year}} c_\mathrm{ig}\ \mathrm{d}t$ $= c_\mathrm{ia}(120{,}000\ \mathrm{year} - 11{,}700\ \mathrm{year}) + c_\mathrm{ig}\, 11{,}700\ \mathrm{year}$ Isolating form this equation leads to $c_\mathrm{ia} = 0.1232$, i.e. far less precipitation than now.	0.8
3.7b	Reading off from figure 3.2b: $\delta^{18}\mathrm{O}$ changes from $-43{,}5$ ‰ to $-34{,}5$ ‰. Reading off	0.2

	from figure 3.2a, T then changes from -40 °C to -28 °C. This gives $\Delta T \approx 12$ °C.	

3.8	From the area A_G one finds that $L = \sqrt{A_G/10} = 4.14 \times 10^5$ m. Inserting numbers in the volume formula found in 3.2c, one finds that: $V_{\mathrm{G,ice}} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\mathrm{ice}} g}} = 3.45 \times 10^{15}\ \mathrm{m}^3$ This ice volume must be converted to liquid water volume, by equating the total masses, i.e. $V_{\mathrm{G,wa}} = V_{\mathrm{G,ice}} \frac{\rho_{\mathrm{ice}}}{\rho_{\mathrm{wa}}} = 3.17 \times 10^{15}\ \mathrm{m}^3$, which is finally converted to a sea level rise, as $h_{\mathrm{G,rise}} = \frac{V_{\mathrm{G,wa}}}{A_0} = 8.79$ m.	0.6

3.9	 **Figure 3.S1** Geometry of the ice ball (white circle) with a test mass m (small gray circle). The total mass of the ice is $M_{\mathrm{ice}} = V_{\mathrm{G,ice}}\,\rho_{\mathrm{ice}} = 3.17 \times 10^{18}\ \mathrm{kg} = 5.31 \times 10^{-7} m_{\mathrm{E}}$ The total gravitational potential felt by a test mass m at a certain height h above the surface of the Earth, and at a polar angle θ (cf. figure 3.S1), with respect to a rotated polar axis going straight through the ice sphere is found by adding that from the Earth with that from the ice: $U_{\mathrm{tot}} = -\frac{G m_{\mathrm{E}} m}{R_{\mathrm{E}} + h} - \frac{G M_{\mathrm{ice}} m}{r} = -mgR_E\left(\frac{1}{1+h/R_E} + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right)$ where $g = G m_E / R_E^2$. Since $h/R_{\mathrm{E}} \ll 1$ one may use the approximation given in the	1.8

	problem, $(1+x)^{-1} \approx 1-x, \ \ \lvert x\rvert \ll 1$, to approximate this by $U_{\mathrm{tot}} \approx -mgR_E\left(1-\frac{h}{R_E}+\frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right)$. Isolating h now shows that $h = h_0 + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}R_E$, where $h_0 = R_E + U_{\mathrm{tot}}/(mg)$. Using again that $h/R_{\mathrm{E}} \ll 1$, trigonometry shows that $r \approx 2R_{\mathrm{E}}\lvert\sin(\theta/2)\rvert$, and one has: $h(\theta)-h_0 \approx \frac{M_{\mathrm{ice}}/m_{\mathrm{E}}}{2\lvert\sin(\theta/2)\rvert}R_E \approx \frac{1.69\ \mathrm{m}}{\lvert\sin(\theta/2)\rvert}$. To find the magnitude of the effect in Copenhagen, the distance of 3500 km along the surface is used to find the angle $\theta_{\mathrm{CPH}} = (3.5\times10^6\ \mathrm{m})/R_E \approx 0.549$, corresponding to $h_{\mathrm{CPH}} - h_0 \approx 6.25\ \mathrm{m}$. Directly opposite to Greenland corresponds to $\theta = \pi$, which gives $h_{\mathrm{OPP}} - h_0 \approx 1.69\ \mathrm{m}$. The difference is then $h_{\mathrm{CPH}} - h_{\mathrm{OPP}} \approx 4.56\ \mathrm{m}$, where h_0 has dropped out.	

	Total	**9.0**