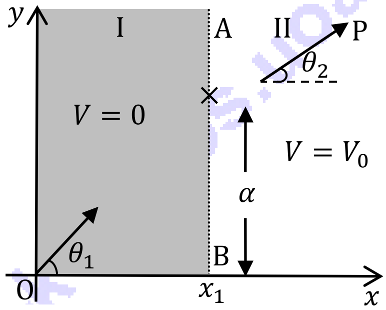
Η Αρχή του Ακρότατου (Extremum Principle) (Σύνολο Μονάδων: 10)

Α Η Αρχή του Ακρότατου στη Μηχανική

Θεωρήστε ένα οριζόντιο $x-y$ επίπεδο χωρίς τριβές, όπως αυτό που φαίνεται στην εικ. 1. Το επίπεδο χωρίζεται σε δύο περιοχές, I και II από μία γραμμή AB, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $x = x_1$. Η δυναμική ενέργεια ενός σημειακού σωματιδίου μάζας m στην περιοχή I είναι $V = 0$ ενώ στην περιοχή II είναι $V = V_0$. Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο O και κινείται με ταχύτητα v_1 κατά μήκος μίας γραμμής, σχηματίζοντας γωνία θ_1 με τον άξονα x. Το σωματίδιο φθάνει στο σημείο P στην περιοχή II με ταχύτητα v_2 κατά μήκος μίας γραμμής, η οποία σχηματίζει γωνία θ_2 με τον άξονα x. Σε αυτό το πρόβλημα (T-2) μπορείτε να αγνοήσετε φαινόμενα που οφείλονται στη βαρύτητα και τη σχετικότητα.



Εικόνα 1

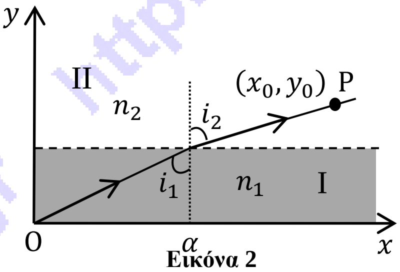
A1	Να εξαγάγετε μία σχέση για το v_2 συναρτήσει των m, v_1 και V_0.	**0,2**
A2	Να εκφράσετε το v_2 συναρτήσει των v_1, θ_1 και θ_2.	**0,3**

Ορίζουμε μία ποσότητα, που ονομάζεται δράση ως $A = m\int v(s)ds$, όπου ds είναι η στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου μάζας m, το οποίο κινείται με ταχύτητα $v(s)$. Η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της διαδρομής. Παραδείγματος χάρη για ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v πάνω σε μία κυκλική διαδρομή ακτίνας R, η δράση A σε μία περιστροφή θα είναι $2\pi mRv$. Για ένα σωματίδιο με σταθερή ενέργεια E, μπορεί να αποδειχθεί ότι από όλες τις πιθανές διαδρομές μεταξύ δύο σταθερών σημείων, η πραγματική διαδρομή είναι εκείνη για την οποία το A, που ορίστηκε πιο πάνω, είναι ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Ιστορικά αυτή είναι γνωστή ως η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης (ΑΕΔ).

A3	Η ΑΕΔ υποδηλώνει ότι η τροχιά ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται μεταξύ δύο σταθερών σημείων σε μια περιοχή σταθερού δυναμικού θα είναι ευθεία γραμμή. Ας υποθέσουμε ότι τα δύο σταθερά σημεία O και P στην εικ. 1 έχουν συντεταγμένες (0,0) και (x_0, y_0) αντίστοιχα και το σημείο στο σύνορο όπου το το σωματίδο μεταβαίνει από την περιοχή I στην περιοχή II, έχει συντεταγμένες (x_1, α). Σημειώστε ότι το x_1 είναι σταθερό και η δράση εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη α. Να γράψετε μία έκφραση για τη δράση $A(\alpha)$. Χρησιμοποιήστε την ΑΕΔ για να εξαγάγετε μία σχέση μεταξύ του v_1/v_2 και αυτών των συντεταγμένων.	**1,0**

Β Η Αρχή του Ακρότατου στην Οπτική

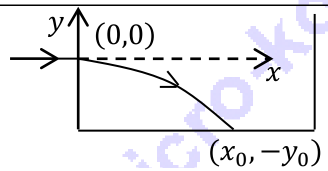
Ακτίνα φωτός διαδίδεται από το μέσο I στο μέσο II με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 αντίστοιχα. Τα δύο μέσα διαχωρίζονται από μία γραμμή παράλληλη προς το άξονα x. Η ακτίνα φωτός σχηματίζει γωνία i_1 με τον άξονα y στο μέσο I και i_2 στο μέσο II (βλ. Εικ. 2). Για να προσδιορίσουμε την τροχιά της ακτίνας, κάνουμε χρήση ακόμη μίας αρχής ακρότατου (ελάχιστου ή μέγιστου) η οποία είναι γνωστή ως Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου ή Αρχή του Fermat.



Εικόνα 2

B1	Η Αρχή δηλώνει ότι μεταξυ δύο σταθερών σημείων, μια ακτίνα φωτός κινείται κατα μήκος εκείνης της διαδρομής στην οποία η χρονική διάρκεια κίνησης μεταξύ των δύο σημείων είναι ένα ακρότατο. Να εξάγετε τη σχέση μεταξύ του $sin\, i_1$ και $sin\, i_2$ με βάση την αρχή του Fermat.	**0,5**

Το σχεδιάγραμμα στην Εικ. 3 δείχνει την τροχιά μιας ακτίνας laser που προσπίπτει οριζόντια σε ένα διάλυμα ζάχαρης στο οποίο η συγκέντρωση της ζάχαρης μειώνεται με το ύψος. Ως επακόλουθο, ο δείκτης διάθλασης του διαλύματος επίσης μειώνεται με το ύψος.



Εικόνα 3: Δοχείο με διάλυμα ζάχαρης

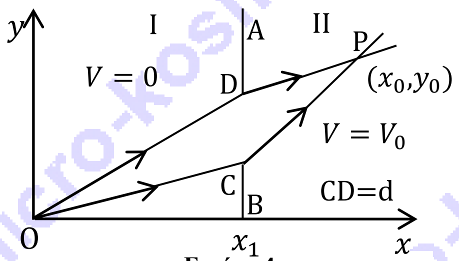
B2	Να υποθέσετε ότι ο δείκτης διάθλασης $n(y)$ εξαρτάται μόνο από το y. Να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση που εξαγάγατε στο B1 για να εξαγάγετε την έκφραση για την κλίση dy/dx της διαδρομής της ακτίνας συναρτήσει του δείκτη διάθλασης n_0 στη θέση $y = 0$ και του $n(y)$.	**1,5**

B3	Η ακτίνα laser κατευθύνεται οριζόντια από το σημείο $(0\,,0)$ προς το διάλυμα της ζάχαρης σε ύψος y_0 από τον πυθμένα του δοχείου όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Δίνεται ότι $n(y) = n_0 - ky$ όπου n_0 και k θετικές σταθερές. Να εξαγάγετε μία έκφραση για το x σε όρους του y και σχετικά φυσικά μεγέθη για την πραγματική τροχιά της ακτίνας laser. Μπορείτε να κάνετε χρήση της σχέσης: $\int \tau\varepsilon\mu\theta d\theta = ln(\tau\varepsilon\mu\,\theta + \varepsilon\varphi\,\theta) + \text{constant}$, όπου $\tau\varepsilon\mu\theta = 1/\sigma\upsilon\nu\theta$ ή $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{constant}$$	**1,2**
B4	Να υπολογίσετε την τιμή του x_0, δηλ. του σημείου όπου η ακτίνα συναντά τον πυθμένα του δοχείου. Δίνεται ότι $y_0 = 10{,}0\ \text{cm}$, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}050\ \text{cm}^{-1}$ (1 cm = 10^{-2} m).	**0,8**

C Η Αρχή του Ακρότατου και η Κυματική Φύση της ύλης

Θα διερευνήσουμε τώρα τη σύνδεση ανάμεσα στην ΑΕΔ και την κυματική φύση ενός κινούμενου σωματιδίου. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι ένα σωματίδιο που κινείται από το σημείο O προς το P μπορεί να ακολουθήσει όλες τις πιθανές τροχιές και θα αναζητήσουμε εκείνη την τροχιά που βασίζεται στην ενισχυτική συμβολή των κυμάτων de Broglie.

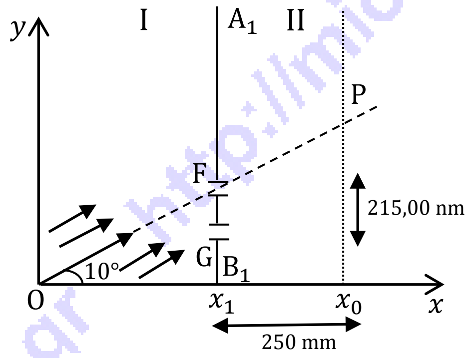
C1	Καθώς το σωματίδιο κινείται πάνω στην τροχιά του κατά μία απειροστή μετατόπιση Δs να βρείτε τη σχέση που συνδέει την αλλαγή της φάσης του κύματος de Broglie του σωματιδίου με την αλλαγή ΔA της δράσης και τη σταθερά του Planck.	**0,6**
C2	Θυμηθείτε το πρόβλημα από το μέρος A, όπου ένα σωματίδιο κινείται από το O στο P (βλ. Εικ. 4). Τοποθετούμε ένα αδιαφανές διαχωριστικό στο σύνορο AB μεταξύ των δύο περιοχών, το οποίο έχει ένα μικρό άνοιγμα CD πλάτους d, τέτοιο ώστε $d \ll x_1$ και $d \ll (x_0 - x_1)$. Θεωρήστε δύο ακρότατου μήκους διαδρομές OCP και ODP, με την OCP να συμπίπτει με την κλασική τροχιά που συζητήθηκε στο μέρος A. Να βρείτε τη διαφοράς φάσης $\Delta\varphi_{CD}$ μεταξύ των δύο διαδρομών σε προσέγγιση πρωτοβάθμιων όρων.	**1,2**



Εικόνα 4

D Συμβολή κυμάτων ύλης

Θεωρήστε μια πηγή ηλεκτρονίων στο σημείο O που εκτοξεύει μια ευθυγραμμισμένη δέσμη ηλεκτρονίων προς μια λεπτή σχισμή F του αδιαφανούς διαχωριστικού A_1B_1, που βρίσκεται σε θέση $x = x_1$, ώστε η OFP να είναι ευθεία. Το P είναι σημείο της οθόνης, η οποία βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ (βλ. Εικ. 5). Η ταχύτητα στην περιοχή I είναι $v_1 = 2{,}0000 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$ και $\theta = 10{,}0000^\circ$. Το δυναμικό στην περιοχή II είναι τέτοιο ώστε $v_2 = 1{,}9900 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$. Η απόσταση $x_0 - x_1$ είναι $250{,}00\ \text{mm}$ $(1\text{mm} = 10^{-3}\text{m})$. Να αγνοήσετε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων.



Εικόνα 5

D1	Αν τα ηλεκτρόνια στο O έχουν επιταχυνθεί από την ηρεμία, να υπολογίσετε το δυναμικό επιτάχυνσης U_1.	**0,3**
D2	Μια απόλυτα όμοια σχισμή G δημιουργείται στο διαχωριστικό A_1B_1 σε απόσταση 215,00 nm $(1\text{nm} = 10^{-9}\text{m})$ χαμηλότερα της F (Εικ. 5). Αν η διαφορά φάσης των κυμάτων de Broglie που φτάνουν στο P μέσω των σχισμών F και G είναι $2\pi\beta$, να υπολογίσετε τη β.	**0,8**
D3	Να υπολογίσετε τη μικρότερη απόσταση Δy από το P για την οποία περιμένουμε να μην ανιχνεύονται ηλεκτρόνια στην οθόνη. [Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\eta\mu(\theta + \Delta\theta) \approx \eta\mu\,\theta + \Delta\theta\ \sigma\upsilon\nu\,\theta$]	**1,2**
D4	Η δέσμη έχει διατομή τετραγωνικού σχήματος με διαστάσεις $500\text{nm} \times 500\text{nm}$ και η πειραματική διάταξη έχει μήκος 2 m. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη πυκνότητα ροής I_{min} (πλήθος ηλεκτρονίων ανά μονάδα κάθετης επιφάνειας, ανά μονάδα χρόνου), αν, κατά μέσο όρο, υπάρχει τουλάχιστον ένα ηλεκτρόνιο στην πειραματική διάταξη κάθε στιγμή;	**0,4**

Ερώτημα	Απάντηση	Μονάδες
A1	$v_2 =$	**0,2**
A2	$v_2 =$	**0,3**
A3	$A(a) =$ $v_1/v_2 =$	**1,0**
B1		**0,5**
B2	$dy/dx =$	**1,5**
B3	$x =$	**1,2**
B4	$x_0 =$	**0,8**
C1	$\Delta\varphi =$	**0,6**
C2	$\Delta\varphi_{CD} =$	**1,2**

D1	$U_1 =$	**0,3**
D2	$\beta =$	**0,8**
D3	$\Delta y =$	**1,2**
D4	$I_{\min} =$	**0,4**