

Γενικές οδηγίες: Θεωρητική εξέταση (30 points)

Η θεωρητική εξέταση διαρκεί 5 ώρες και βαθμολογείται με 30 points.

Πριν την εξέταση

Δεν πρέπει να ανοίξετε τους φακέλους των εκφωνήσεων πριν ακουστεί η ηχητική σήμανση που δηλώνει την έναρξη της εξέτασης.

Η έναρξη και η λήξη της εξέτασης δηλώνονται από ένα ηχητικό σήμα. Θα υπάρχουν αναγγελίες κατά τη συμπλήρωση κάθε ώρας εξέτασης, καθώς και 15 λεπτά πριν τη λήξη της (πριν το τελικό ηχητικό σήμα).

Κατά τη διάρκεια της εξέτασης

- Σας παρέχονται ειδικά Φύλλα Απαντήσεων για την αναγραφή των απαντήσεών σας. Καταγράψτε τα τελικά αποτελέσματα στα ειδικά πλαίσια του κατάλληλου **Φύλλου Απαντήσεων**. Για κάθε πρόβλημα διατίθενται επί πλέον λευκά **πρόχειρα** φύλλα για την εκτέλεση **αναλυτικών υπολογισμών**. Να χρησιμοποιείτε τα πρόχειρα που αντιστοιχούν στο επιλυόμενο πρόβλημα (ελέγξτε τον αριθμό προβλήματος στην κεφαλίδα). Αν σε ένα φύλλο γράψετε κάτι που δεν θέλετε να βαθμολογηθεί διαγράψτε το. Χρησιμοποιείτε μόνο την πρόσθια όψη των φύλλων.
- Στις απαντήσεις σας προσπαθήστε να είστε όσο πιο ακριβείς γίνεται: χρησιμοποιήστε εξισώσεις, λογικούς τελεστές και σχήματα για να καταγράψετε τις σκέψεις σας όποτε αυτό είναι δυνατό. Αποφύγετε τις μακροσκελείς προτάσεις.
- Παρακαλείστε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο πλήθος σημαντικών ψηφίων όταν γράφετε αριθμητικά αποτελέσματα.
- Ενδέχεται να μπορείτε να λύσετε μεταγενέστερα ερωτήματα ενός θέματος χωρίς να έχετε απαντήσει στα προηγούμενα.
- Σε χωριστό φύλλο σας δίνεται κατάλογος φυσικών σταθερών.

Δεν επιτρέπεται να εγκαταλείψετε τη θέση σας χωρίς άδεια. Αν χρειάζεστε βοήθεια (πόσιμο νερό, πρόβλημα λειτουργίας του υπολογιστή τσέπης, χρειάζεται να πάτε στην τουαλέτα, κ.λπ.) παρακαλείστε να καλέσετε ένα συνοδό σηκώνοντας μια από τις τρεις σημαίες ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", ή "I need help, please" σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση).

Στο τέλος της εξέτασης

- Κατά τη λήξη της εξέτασης πρέπει να σταματήσετε να γράφετε αμέσως.

- Για κάθε πρόβλημα, τακτοποιήστε τα φύλλα με την ακόλουθη σειρά: Φύλλα Προβλήματος, Φύλλα Απαντήσεων, Φύλλα Αναλυτικών Υπολογισμών και Πρόχειρα Φύλλα.
- Τοποθετήστε όλα τα φύλλα ενός προβλήματος στον ίδιο φάκελο. Επίσης τοποθετήστε τις γενικές οδηγίες στον ξεχωριστό φάκελο που απομένει. Σιγουρευτείτε ότι έχετε αναγράψει τον Κωδικό Μαθητή σε κάθε φάκελο. Παραδώστε επίσης λευκά φύλλα που περισσεύσαν. Δεν επιτρέπεται να πάρετε μαζί σας φύλλα της εξέτασης.
- Αφήστε πάνω στο τραπέζι εξέτασης τον υπολογιστή τσέπης που σας δόθηκε.

Σκοτεινή Ύλη

Η πρώτη επίσημη ένδειξη για την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης δόθηκε από τον Fritz Zwicky και τις παρατηρήσεις του για τη δυναμική συμπεριφορά του γαλαξιακού σμήνους Coma, ενός σμήνους που αποτελείται από χίλιους περίπου γαλαξίες. Ο Zwicky χρησιμοποίησε το θεώρημα Virial για να υπολογίσει τη μάζα του γαλαξιακού σμήνους. Για ένα απλό σύστημα ήλιου-πλανητών όπου κάθε πλανήτης περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο σε κυκλική τροχιά, το θεώρημα Virial περιγράφει τον ακριβή τρόπο με τον οποίο η κινητική ενέργεια του πλανήτη σχετίζεται με την βαρυτική δυναμική του ενέργειας. Αντιστοίχως, για την γενική περίπτωση συστήματος πολλών σωμάτων που συνδέονται με κάποια μορφή αλληλεπίδρασης, το θεώρημα Virial συσχετίζει τη χρονική μέση τιμή της συνολικής κινητικής ενέργειας με την χρονική μέση τιμή της συνολικής δυναμικής ενέργειας.

Το 1933, βασιζόμενος στην παρατήρησή του για την ταχύτητα των γαλαξιών κοντά στα άκρα του γαλαξιακού σμήνους Coma, ο Zwicky υπολόγισε ότι το σμήνος έχει περισσότερη μάζα από αυτήν που αρχικώς είχε παρατηρηθεί οπτικά. Η βαρυτική έλξη όμως από την παρατηρήσιμη μάζα (των γαλαξιών) ήταν πολύ μικρή σε σχέση με τις ταχύτητες των γαλαξιών. Άρα θα έπρεπε να υπάρχει κάποια κρυμμένη μάζα που να εξηγεί τη μεγάλη τιμή ταχύτητας των γαλαξιών. Αυτή η κρυφή μάζα είναι η μάζα της σκοτεινής ύλης.

A. Σμήνος Γαλαξιών

Θεωρήστε ένα σμήνος που αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος N γαλαξιών και από σκοτεινή ύλη, ομοιόμορφα κατανομημένα σε μια σφαίρα ακτίνας R με συνολική μάζα του σμήνους ίση με M . Υποθέστε ότι η μέση τιμή μάζας ενός γαλαξία είναι m και ότι το σμήνος βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

A.1	Θεωρώντας συνεχή την κατανομή μάζας στο σμήνος, να βρείτε τη συνολική δυναμική ενέργεια του σμήνους λόγω βαρυτικής αλληλεπίδρασης, σε συνάρτηση με τα μεγέθη M και R .	1.0 pt.
-----	--	---------

Λόγω της διαστολής του σύμπαντος, οποιοδήποτε σώμα θα απομακρύνεται από ένα παρατηρητή που βρίσκεται στη Γη με ταχύτητα που εξαρτάται από την απόσταση του παρατηρητή από το αντικείμενο. Μια συγκεκριμένη συχνότητα Lyman (ονομασία φασματικής γραμμής στο φάσμα εκπομπής του υδρογόνου) από έναν υπερκαινοφανή (supernova) αστέρα τύπου IA που ανήκει στον i -ο γαλαξία του σμήνους έχει τιμή f_i , όπου $i = 1, \dots, N$, ενώ η ίδια συχνότητα Lyman στη Γη είναι f_0 .

A.2	Να προσδιορίσετε τη μέση τιμή ταχύτητας V_{cr} του σμήνους που απομακρύνεται από τη Γη συναρτήσει των μεγεθών f_i (με $i = 1, \dots, N$), f_0 και N . Σημειώστε ότι η ταχύτητα ενός γαλαξία είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός c .	0.5 pt.
A.3	Υποθέτοντας ότι οι ταχύτητες των γαλαξιών ως προς το κέντρο του σμήνους είναι	1.5 pt.

ισότροπες, δηλ. ανεξάρτητες προσανατολισμού, υπολογίστε τη μέση τετραγωνική ταχύτητα v_{rms} των γαλαξιών ως προς το κέντρο του σμήνους συναρτήσει των μεγεθών N , f_i (με $i = 1, \dots, N$.) και f_0 . Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, να προσδιορίσετε τη μέση κινητική ενέργεια ενός γαλαξία ως προς το κέντρο του σμήνους σε συνάρτηση με τα μεγέθη v_{rms} και m .

Για τον υπολογισμό της συνολικής μάζας του σμήνους είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Virial. Το θεώρημα, διατυπωμένο για ένα σύστημα σωματιδίων που υπόκεινται στη συντηρητική αλληλεπίδρασή τους γράφεται:

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

όπου $\langle K \rangle_t$ είναι η μέση ως προς το χρόνο τιμή της συνολικής κινητικής ενέργειας, $\langle U \rangle_t$ είναι η μέση τιμή ως προς το χρόνο της δυναμικής ενέργειας, και γ είναι μια σταθερά. Αυτό το θεώρημα προκύπτει υποθέτοντας ότι για ένα σύστημα σωματιδίων δέσμιων από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, η τιμή της θέσης και το μέτρο της ορμής κάθε σωματιδίου είναι πεπερασμένα, συνεπώς και η ακόλουθη ποσότητα

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

είναι επίσης πεπερασμένη.

A.4	Βασισμένοι στο γεγονός ότι για μεγάλο χρονικό διάστημα η μέση ως προς το χρόνο τιμή της ποσότητας $d\Gamma/dt$ μηδενίζεται, δηλ. $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$ υπολογίστε την τιμή της σταθεράς γ που εμφανίζεται στο θεώρημα Virial για την περίπτωση βαρυτικής αλληλεπίδρασης. (Υπόδειξη: προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα με την άθροιση στο Γ για ένα μικρό πλήθος γαλαξιών.	1.7 pt.
-----	--	---------

A.5	Από τα προηγούμενα αποτελέσματα προσδιορίστε τη συνολική μάζα σκοτεινής ύλης του σμήνους συναρτήσει των μεγεθών N , m_g , R και v_{rms} , όπου m_g είναι η μέση τιμή της συνολικής ορατής μάζας του γαλαξία. Σημειώστε ότι η μέση τετραγωνική ταχύτητα της σκοτεινής ύλης είναι ίση με εκείνη των γαλαξιών.	0.5 pt.
-----	---	---------

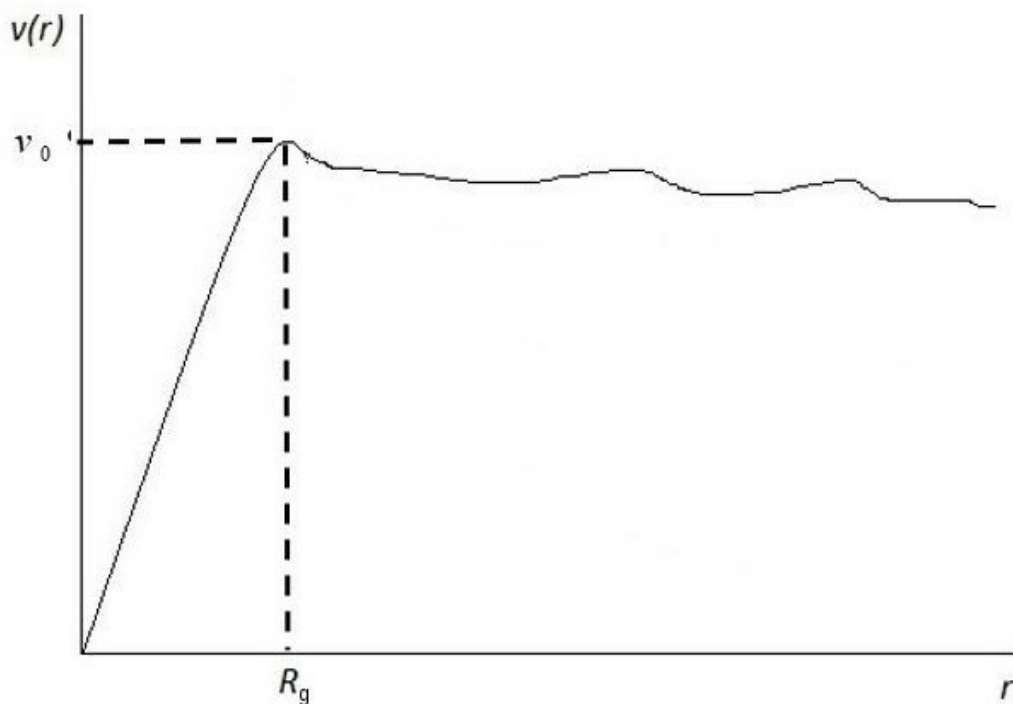
B. Σκοτεινή ύλη σε έναν Γαλαξία

Η σκοτεινή ύλη υπάρχει επίσης εντός του γαλαξία αλλά και γύρω από αυτόν. Θεωρήστε ένα σφαιρικό

γαλαξία η ορατή περιφέρεια του οποίου έχει ακτίνα R_g (δηλ. μια προσεγγιστική μέγιστη απόσταση στην οποία υπάρχει μεγάλος αριθμός ορατών αστερών, ενώ δεν αποκλείεται να υπάρχουν πολύ λίγοι αστερες πέρα από την απόσταση R_g). Υποθέστε ότι οι αστερες στον γαλαξία είναι σημειακά σωματίδια με μέση τιμή μάζας m_s . Οι αστερες είναι ομογενώς κατανομημένοι στο γαλαξία με πυκνότητα πληθυσμού n και θεωρούμε ότι κινούνται σε κυκλικές τροχιές.

B.1	Αν ο γαλαξίας αποτελείται μόνο από αστερες, να βρείτε την ταχύτητα $v(r)$ ενός αστερα ως συνάρτηση της απόστασής του από το κέντρο του γαλαξία και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας $v(r)$ για $r < R_g$ και $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	---	---------

Μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης από την καμπύλη της γαλαξιακής περιστροφής, που είναι ένα γράφημα της $v(r)$ όπως αυτή προκύπτει από παρατηρήσεις. Το πιο κάτω γράφημα δείχνει μια τυπική γραφική παρασταση της γαλαξιακής περιστροφής. Υποθέστε, για απλότητα, ότι το $v(r)$ είναι γραμμική συνάρτηση για $r \leq R_g$, ενώ είναι σταθερό και ίσο με v_0 για $r > R_g$.



Εικ. 1 Γραφική

παράσταση της ταχύτητας με την οποία περιστρέφεται ένα άστρο στον γαλαξία (καμπύλη γαλαξιακής περιστροφής).

B.2	Υπολογίστε την ολική μάζα m_R εκείνου του τμήματος του γαλαξία που βρίσκεται μέσα σε σφαίρα ακτίνας R_g , ως συνάρτηση των v_0 και R_g .	0.5 pt.
-----	--	---------

Η διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος στο ερώτημα B.2 και του γραφήματος στο B.1 υποδηλώνει την ύπαρξη σκοτεινής ύλης.

B.3	Προσδιορίστε την πυκνότητα της σκοτεινής ύλης ως συνάρτηση των r , R_g , v_0 , n και m_s για $r < R_g$ και $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	---	---------

Γ. Διαστρικό Αέριο και Σκοτεινή Ύλη

Έστω τώρα ένας νεαρός γαλαξίας του οποίου η μάζα αποτελείται κυρίως από διαστρικό αέριο και σκοτεινή ύλη (αμελούμε τη μάζα των αστέρων). Θεωρείστε ότι το διαγαλαξιακό αέριο αποτελείται από όμοια σωματίδια μάζας m_p . Η αριθμητική πυκνότητα $n(r)$ και η θερμοκρασία $T(r)$ του αερίου εξαρτώνται από την απόσταση r από το κέντρο του γαλαξία. Παρόλο που συμβαίνουν πολλές φυσικές διαδικασίες μέσα στο αέριο, θεωρούμε ότι αυτό βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία που οφείλεται στην πίεση και στη βαρυτική γαλαξιακή έλξη.

C.1	Να υπολογίσετε τη βαθμίδα (μεταβολής) dP/dr της πίεσης του αερίου, συναρτήσει των όρων $m'(r)$, r και $n(r)$, όπου $m'(r)$ είναι η ολική μάζα του αερίου και της σκοτεινής ύλης μέσα στη σφαίρα με ακτίνα r από το κέντρο του γαλαξία.	0.5 pt.
-----	--	---------

C.2	Υποθέτουμε ότι το διαστρικό αέριο είναι ιδανικό αέριο, να υπολογίσετε τη $m'(r)$ συναρτήσει των μεγεθών $n(r)$, $T(r)$ και των παραγώγων τους ως προς r .	0.5 pt.
-----	--	---------

Για λόγους απλότητας να υποθέσετε ακολούθως ότι το αέριο είναι σε ισοθερμική κατανομή στη θερμοκρασία T_0 και η αριθμητική πυκνότητα του διαστρικού αερίου δίνεται από τη σχέση

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

όπου α και β είναι κάποιες σταθερές.

C.3	Να υπολογίσετε την πυκνότητα μάζας της σκοτεινής ύλης ως συνάρτηση του r μέσα στον γαλαξία.	1.0 pt.
-----	---	---------

Κωδικός Μαθητή						
----------------	--	--	--	--	--	--

Α. Σμήνος Γαλαξιών

Question	Answer	Marks
A.1 (1.0 pt.)	$U =$	
A.2 (0.5 pt.)	$V_{rc} =$	
A.3 (1.5 pt.)	$K_{ave} =$ $V_{rms} =$	
A.4 (1.7 pt.)	$\gamma =$	
A.5 (0.5 pt.)	$M_{dm} =$	

B. Σκοτεινή Ύλη σε έναν Γαλαξία

Question	Answer	Marks
B.1 (0.8 pt.)	Για $r < R_g$: $v(r) =$ Για $r \geq R_g$: $v(r) =$ Σχεδιάστε την $v(r)$ για $r < R_g$ και $r \geq R_g$.	

--	--	--	--

B.2 (0.5 pt.)	$m_R = m'(R_g) =$	
B.3 (1.5 pt.)	Για $r < R_g$: $\rho(r) =$ Για $r \geq R_g$: $\rho(r) =$	

C. Διαστρικό Αέριο και Σκοτεινή Ύλη

Question	Answer	Marks
C.1 (0.5 pt.)	$\frac{dP}{dr} =$	
C.2 (0.5 pt.)	$m'(r) =$	
C.3 (1.0 pt.)	$\rho_{dm}(r) =$	

----- ΜΗ ΓΡΑΦΕΤΕ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΗ -----

SECTION	SCORE
A	
B	
C	
TOTAL	