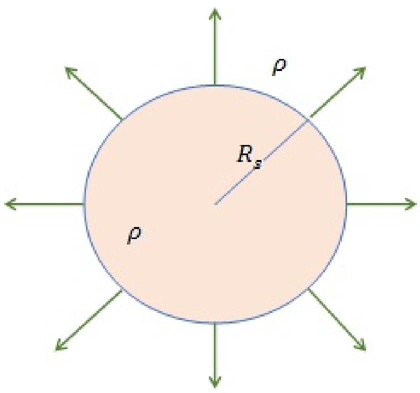
Κοσμικός Πληθωρισμός

Λογω των σχετικών κινήσεων των γαλαξιών όπως αυτές παρατηρούνται από τη Γή, το (παρατηρούμενο) μήκος κύματος ενός συγκεκριμένου γαλαξία στο ορατό φάσμα διαφέρει από την πραγματική του τιμή. Για ένα σύνολο γαλαξιών, ένας παρατηρητής αναμένει για καθε τυχαία κατανομή τετοιων μετατοπίσεων μήκους κύματος, μερικές θετικές (ερυθρή μετατόπιση - απομάκρυνση) και μερικές αρνητικές (μπλε μετατόπιση). Ωστόσο οι παρατηρήσεις δειχνουν οτι όλες οι μετατοπίσεις, εκτός αυτών των κοντινών ομάδων γαλαξιών, είναι ερυθρές μετατοπίσεις. Αυτό ισχύει ακομα και αν η παρατήρηση γίνεται από διαφορετικό σημείο του σύμπαντος. Αρα, το σύμπαν διαστέλλεται. Στο πλαισιο αυτό, τοπικές ανωμαλίες του σύμπαντος μπορούν να παραβλέπονται για κλίμακες μεγαλύτερες από 100 Mpc (megaparsec). Σε μέσες τιμές μεγαλης κλίμακας, η χοντροκομμένη και άγαρμπη αρχική κατανομή των γαλαξιών γινεται όλο και πιο ισοτροπική (ανεξαρτητη από της κατευθυνση) και ομογενής (ανεξάρτητη της θεσης). Επομένως, μπορούμε να υποθεσουμε το σύμπαν σαν υλικό σώμα με ομοιόμορφη πυκνότητα ρ που διαστέλλεται.

A. Διαστολή του Σύμπαντος



Ως ένα απλό μοντέλο του Σύμπαντος, ας θεωρήσουμε μια διαστελλόμενη ομογενή σφαίρα ενσωματωμένη σε άλλη σφαίρα πολύ μεγαλύτερης ακτίνας και ίδιας πυκνότητας. Έστω R_s η ακτίνα της σφαίρας σε δεδομένη χρονική στιγμή. Για να εκφράσουμε τη διαστολή της σφαίρας η χρονική εξάρτηση της ακτίνας $R(t)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω του παράγοντα κλίμακας $a(t)$, δηλ. $R(t) = a(t)R_s$.

Χρησιμοποιώντας το Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης του Newton, για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση μιας στοιχειώδους μάζας που βρίσκεται στο όριο της σφαίρας σύμφωνα με το μοντέλο μας του σύμπαντος, καταλήγουμε στις εξισώσεις Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \qquad (1)$$

όπου k αδιάστατη σταθερά και c η ταχύτητα του φωτός.

A.1	Υπολογίστε τη σταθερά A_1 της εξίσωσης (1)	1.0 pt.

Η περιγραφή έως τώρα είναι μη σχετικιστική. Μπορεί όμως να επεκταθεί σε ένα σχετικιστικό σύστημα μέσω της θεώρησης της ποσότητας $\rho(t)c^2$ ως πυκνότητας συνολικής ενέργειας (εξαιρώντας τη βαρυτική δυναμική ενέργεια). Σε αυτό το σχετικιστικό σύστημα προκύπτει η 2η εξίσωση Friedmann:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad (2)$$

χρησιμοποιώντας τον 1ο Θερμοδυναμικό Νόμο ενός αδιαβατικού συστήματος, όπου με p συμβολίζεται η πίεση που ασκείται στη σφαίρα.

A.2	Προσδιορίστε τη σταθερά A_2 της εξίσωσης (2)	0.7 pt.

Για την επίλυση των εξισώσεων (1) και (2), θα πρέπει να θεωρήσουμε μια σχέση $p = p(\rho)$, της μορφής $p(t)/c^2 = wp(t)$, όπου w είναι μία σταθερά. Υπάρχει επίσης ένας παράγοντας $H = \dot{a}/a$ που αποκαλείται παράμετρος Hubble. Οι τρέχουσες τιμές των παραμέτρων συμβολίζονται με το δείκτη 0 όπως t_0, ρ_0, H_0, a_0 κ.λπ. Για απλότητα, θεωρούμε $a_0 = 1$.

Πιστεύεται ότι το Σύμπαν ξεκίνησε με μια μεγάλη έκρηξη, αποκαλούμενη Big-Bang, που παράγει ακτινοβολία σχετικιστικών σωματιδίων. Κατά τη διάρκεια της διαστολής του, το σύμπαν ψύχεται και η συμπεριφορά των σωματιδίων μεταπίπτει σε μη σχετικιστική. Παρ΄ όλ΄ αυτά, πρόσφατες παρατηρήσεις ξεκαθαρίζουν ότι το παρόν Σύμπαν κυριαρχείται από μια κοσμολογική σταθερή πυκνότητα ενέργειας. Καθώς το σύμπαν διαστέλλεται, το μήκος κύματος των φωτονίων αυξάνεται ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας.

A.3	Για κάθε μία από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις προσδιορίστε την προκύπτουσα τιμή του w για ένα σύμπαν στο οποίο (i) υπάρχει μόνο ακτινοβολία (δηλ. ενέργεια φωτονίων), (ii) υπάρχει μη σχετικιστική μαζα και (iii) ισχύει ένα μοντέλο σταθερής πυκνότητας ενέργειας.	0.9 pt.

A.4	Στην περίπτωση όπου $k=0$, βρείτε το $a(t)$ για κάθε μία από τις περιπτώσεις (i) ως (iii) που αναφέρονται στο ερώτημα Α.3. Χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη $a(t=0)=0$ για τις περιπτώσεις (i) και (ii), και τη συνθήκη $a_0=1$ για την περίπτωση (iii).	1.2 pt.

Η σταθερά k στην Εξ. (1) αναφέρεται στην κατηγοριοποίηση της χωρικής γεωμετρίας του σύμπαντος. Η τιμή της μπορεί να είναι $k=+1$ για σύμπαν θετικής καμπυλότητας (κλειστό), $k=0$ για επίπεδο σύμπαν (άπειρο), και $k=-1$ για σύμπαν αρνητικής καμπυλότητας (ανοικτό, άπειρο). Ας ορίσουμε ένα λόγο πυκνοτήτων $\Omega=\rho/\rho_c$, όπου $\rho_c c^2=H^2/A_1$ είναι η *κρίσιμη τιμή πυκνότητας ενεργειας*. Σημειώστε ότι το A_1 είναι εκείνο που υπολογίστηκε στο πρόβλημα Α.1.

A.5	Εκφράστε το k της εξ. (1) συναρτήσει των Ω, H, a και R_0.	0.1 pt.

A.6	Βρείτε ένα διάστημα τιμών του Ω που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις τιμές $k=+1$, $k=0$ and $k=-1$.	0.3 pt.

B. Κίνητρο για την Εισαγωγή στην Φάση Πληθωρισμού και οι γενικές της συνθήκες

Η παρατήρηση της μικροκυματικής κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) οδηγεί στην εκτίμηση οτι το παρόν σύμπαν ειναι επίπεδο. Το πρόβλημα εδώ ειναι ότι αν αυτη η υπόθεση είναι σωστή, θα έπρεπε το παρόν σύμπαν να ήταν ακριβώς επίπεδο και στην αρχική του φάση, αλλιώς οποιαδήποτε απόκλιση απο την επίπεδη μορφή θα μεγάλωνε με το χρόνο και θα αλλοίωνε τη σημερινή επίπεδη μορφή του.

B.1	Βρείτε το $(\Omega(t)-1)$ ως συνάρτηση του χρόνου για σύμπαν που βρίσκεται είτε σε στάδιο που κυριαρχεί η ακτινοβολία, είτε σε στάδιο που κυριαρχεί η μη σχετικιστική ύλη (δείτε το πρόβλημα Α.3).	0.4 pt.

Για τη λυση του προβλήματος σε μια αρχική χρονική περίοδο της ιστορίας του, το σύμπαν θα έπρεπε να περάσει μια περίοδο κυριαρχίας σταθερής πυκνότητας ενέργειας, η οποία οδηγεί σε μια εκθετικού τύπου διαστολή που ονομάζεται πληθωριστική περίοδος.

B.2	Για αυτήν την περίοδο σταθερής ενεργειακής πυκνότητας βρείτε το $(\Omega(t)-1)$ σαν συνάρτηση του χρόνου. Υποθέστε ότι $(\Omega(t)-1)\ll 1$.	0.3 pt.
	Δείξτε οτι η συνθήκη για πληθωρισμό ισοδυναμεί με τις παρακάτω συνθήκες:	

B.3	αρνητική πίεση, επιταχυνόμενη διαστολή ($\ddot{a} > 0$), και μειούμενη ακτίνα Hubble ($(d(aH)^{-1}/dt < 0)$.	0.7 pt.

B.4	Να δείξετε ότι η συνθήκη για τη μειούμενη ακτίνα Hubble μπορεί να εκφραστει ως συνάρτηση της παραμέτρου $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$, $\varepsilon < 1$.	0.2 pt.

Πληθωρισμός προκύπτει εφόσον $\varepsilon < 1$ και παύει όταν $\varepsilon = 1$. Μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό e-folding N, έτσι ώστε $dN = d\ln a = Hdt$ και $N = 0$ στο τέλος του πληθωρισμού.

C. Πληθωρισμός που παράγεται από Ομοιόμορφα Κατανεμημένα Σωματίδια

Παράδειγμα απλού φυσικού συστήματος που μπορεί να οδηγήσει σε περίοδο πληθωρισμού (inflation) είναι ένα σύμπαν που κυριαρχείται από ομοιόμορφα κατανεμημένη ύλη. Αυτό το είδος ύλης καλείται *inflatron* και περιγράφεται από μια συνάρτηση $\phi(t)$.

Η δυναμική-διαφορική εξίσωση του σωματιδίου μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \tag{3}$$

όπου $V = V(\phi)$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού και $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Η παράμετρος Hubble ικανοποιεί τον περιορισμό

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]. \tag{4}$$

με το M_{pl} να είναι μία σταθερά που καλείται *κανονικοποιημένη μάζα Planck*. Η φάση του πληθωρισμού προκύπτει κατά τη διάρκεια της επικράτησης της δυναμικής ενέργειας στην κινητική για επαρκές χρονικό διάστημα ώστε ο όρος $\ddot{\phi}$ της εξισωσης (3) να μπορεί να αγνοηθεί. Αυτή η συνθήκη ονομάζεται *βραδεία* (slow-roll) προσέγγιση.

Οι ποσότητες ϵ kai $\eta_V = \delta + \epsilon$, όπου $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, ονομάζονται παράμετροι 'slow-roll'.

C.1	Εκφράστε τις τιμές των παραμέτρων ϵ, η_V, $dN/d\phi$ συναρτήσει του δυναμικού $V(\phi)$ και της πρώτης και δεύτερης παραγώγου (V' και V'').	1.7 pt.

D. Πληθωρισμός με ένα απλό Δυναμικό

Οι προβλέψεις οποιουδήποτε πληθωριστικού μοντέλου θα πρέπει να συγκρίνονται με τους παρατηρήσιμους περιορισμούς από τη CMB για n_s = 0,968 ± 0,006 και r < 0,12, όπου $r = 16\epsilon$ και $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ υπολογίζονται για $\phi = \phi_{start}$ σε πληθωριστικό μοντέλο όπου κυριαρχεί η ύλη. Υποθέστε ότι το δυναμικό του σωματιδίου έχει την απλή μορφή $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}}\right)^n$ όπου n ακέραιος και Λ μία σταθερά.

D.1	Υπολογίστε την τιμή του ϕ_{end} στο τέλος του πληθωρισμού.	0.4 pt.
D.2	Εκφράστε τα r και n_s συναρτήσει του αριθμού N και του ακέραιου n. Εκτιμήστε την τιμή του n που προσεγγίζει τις παρατηρούμενες τιμές των r και n_s. Για τους υπολογισμούς σας χρησιμοποιήστε την τιμή N = 60.	0.6 pt.

Κωδικός Μαθητή						

A. Expansion of Universe

Question	Answer	Marks
A.1 (**1.3 pt.**)	A_1 =	
A.2 (**0.9 pt.**)	A_2 =	
A.3 (**1.2 pt.**)	(i) w_r = (ii) w_m = (iii) w_Λ =	

A. Διαστολή του Σύμπαντος

Question	Answer	Marks
A.4 **(1.2 pt.)**	(i) $a(t)$ = (ii) $a(t)$ = (iii) $a(t)$ =	
A.5 **(0.1 pt.)**		
A.6 **(0.3 pt.)**		

B. Κίνητρο για την Εισαγωγή στη Φάση Πληθωρισμού και οι γενικές της συνθήκες

Question	Answer	Marks
B.1 **(0.5 pt.)**	$(\Omega - 1)$ =	
B.2 **(0.3 pt.)**	$(\Omega - 1)$ =	

B.3 **(0.9 pt.)**		
B.4 **(0.2 pt.)**		

C. Πληθωρισμός που παράγεται από Ομοιόμορφα Κατανεμημένα Σωματίδια

Question	Answer	Marks
C.1 **(1.7 pt.)**	$\epsilon \approx$ $\eta_V \approx$ $\frac{dN}{d\phi} \approx$	

D. Πληθωρισμός Σωματιδίων με ένα Απλό Δυναμικό

Question	Answer	Marks
D.1 **(0.5 pt.)**	$\phi_{end} \approx$	
D.2	$r =$	

(**0.9 pt.**)	n_s =	