LIGO-GW150914 (10 μονάδες)

Το 2015, το παρατηρητήριο βαρυτικών κυμάτων LIGO ανίχνευσε για πρώτη φορά τη διέλευση των βαρυτικών κυμάτων (gravitational waves ή GW) διαμέσου της Γης. Το συμβάν αυτό, το οποίο ονομάστηκε GW150914, προκλήθηκε από κύματα που δημιουργήθηκαν από δύο μαύρες τρύπες που περιστρέφονταν, η μια γύρω από την άλλη, σε σχεδόν κυκλικές τροχιές. Σε αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να εκτιμήσετε κάποιες φυσικές παραμέτρους του συστήματος των δύο μαύρων τρυπών, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του σήματος που ανιχνεύθηκε στη Γη.

Μέρος A: Νευτώνιες τροχιές (υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων) (3.0 μονάδες)

A.1 Να θεωρήσετε ένα σύστημα δύο αστέρων με μάζες M_1, M_2, οι οποίοι βρίσκονται σε θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, αντίστοιχα, με αφετηρία του συστήματος αναφοράς το κέντρο μάζας των δύο αστέρων έτσι ώστε: **1.0pt**

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\ . \qquad (1)$$

Οι δύο αστέρες είναι απομονωμένοι από το υπόλοιπο Σύμπαν και κινούνται μη σχετικιστικές ταχύτητες. Βάση των Νόμων του Νεύτωνα προκύπτει ότι η επιτάχυνση του αστέρα με μάζα M_1 είναι:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\ , \qquad (2)$$

όπου $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$.
Βρείτε το $n \in \mathbb{N}$ και τον παράγοντα *α* όπου $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$.
G είναι η σταθερά παγκόσμιας έλξης [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}].

A.2 Η ολική ενέργεια του συστήματος των δύο αστέρων οι οποίοι περιστρέφονται σε κυκλικές τροχιές, δίνεται από τη σχέση: **1.0pt**

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\ , \qquad (3)$$

όπου

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\ , \qquad M \equiv M_1 + M_2\ , \qquad (4)$$

είναι η *ανηγμένη μάζα* και η *ολική μάζα* του συστήματος αντίστοιχα, Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα και L είναι η συνολική απόσταση μεταξύ των δύο αστέρων $L = r_1 + r_2$. Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τον όρο *A*, $A(\mu, \Omega, L)$.

A.3 Η εξίσωση 3 μπορεί να απλοποιηθεί σε $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$. **1.0pt**
Να καθορίσετε τον αριθμό β.

Μέρος B: Εισάγοντας την σχετικιστική προσέγγιση (7.0 μονάδες)

Η ορθή θεωρία που περιγράφει τη βαρύτητα, η *Γενική Σχετικότητα*, διατυπώθηκε από τον Einstein το 1915 και προβλέπει ότι η διάδοση των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων γίνεται με την ταχύτητα του φωτός. Οι φορείς πληροφορίας των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων ονομάζονται GW. Τα GW εκπέμπονται όταν τα σώματα (μάζες) επιταχύνονται με αποτέλεσμα το σύστημα των σωμάτων να χάνει ενέργεια.

Να θεωρήσετε ότι υπάρχει ένα σύστημα με δύο σημειακά σωματίδια, απομονωμένα από το υπόλοιπο Σύμπαν. Ο Einstein απέδειξε ότι για μικρές ταχύτητες τα εκπεμπόμενα GW: 1) έχουν κυκλική συχνότητα διπλάσια από την κυκλική συχνότητα της τροχιακής κίνησης, 2) είναι δυνατό να χαρακτηρίζονται από μια φωτεινότητα, δηλ. εκπεμπόμενη ισχύ $\mathcal{P}$, που καθορίζεται από την εξίσωση τετραπόλου του Einstein:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) . \tag{5}$$

Όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

Για ένα σύστημα δύο σημειακών σωματιδίων που περιστρέφονται στο επίπεδο $x-y$, το Q_{ij} δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα (όπου i, j δηλώνουν τον αριθμό της γραμμής και τον αριθμό της στήλης αντίστοιχα).

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2x_A^2 - y_A^2\right) , \qquad Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2y_A^2 - x_A^2\right) , \qquad Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2) , \tag{6}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A x_A y_A , \tag{7}$$

και $Q_{ij} = 0$ για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Με (x_A, y_A) συμβολίζεται η θέση της μάζας A στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

B.1 Για τις κυκλικές τροχιές που περιγράφονται στο A.2 οι συνιστώσες του Q_{ij} μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση του χρόνου t όπως φαίνεται πιο κάτω: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} \left(a_i + b_i \cos kt\right) , \qquad Q_{ij} \overset{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt . \tag{8}$$

Να βρείτε το k σαν συνάρτηση της Ω και των αριθμητικών τιμών των σταθερών a_i, b_i, c_{ij}.

B.2 Για το σύστημα σωματιδίων να βρείτε μια σχέση για την ισχύ $\mathcal{P}$ που εκπέμπεται υπό μορφή βαρυτικών κυμάτων και από τη σχέση: 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6 . \tag{9}$$

να υπολογίσετε το ξ. [Αν δεν μπορέσετε να υπολογίσετε το ξ, να θεωρήσετε ότι $\xi = 6.4$ για τα υπόλοιπα ερωτήματα.]

B.3 Χωρίς εκπομπή των GW τα δύο σώματα θα περιστρέφονταν επ΄ άπειρον σε κυκλικές τροχιές σταθερής ακτίνας
Η εκπομπή όμως των GW έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της ενέργειας του συστήματος και τη βραδεία ελάττωση των ακτίνων. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ έχει τη μορφή: 1.0pt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_\mathrm{c})^5 \;, \tag{10}$$

όπου η M_c αποκαλείται *Χαρακτηριστική (Τερετίζουσα) Μάζα* (chirp mass). Να εξάγετε το M_c σαν συνάρτηση των M και μ. Η chirp mass καθορίζει την αύξηση της συχνότητας κατά τη διάρκεια της μείωσης της ακτίνας περιστροφής. [Ο όρος "τερετίζουσα" ή "chirp" είναι εμπνευσμένος από την υψηλή συχνότητα ήχου που παράγουν τα μικρά πουλιά].

B.4 Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που δόθηκε νωρίτερα, συσχετίστε την τροχιακή γωνιακή ταχύτητα Ω με τη συχνότητα f_GW των GW. Γνωρίζοντας ότι για κάθε ομαλή (δηλ. με παραγώγους κάθε τάξης σε όλο το π.ο. της) συνάρτηση $F(t)$ και $a \neq 1$, 2.0pt

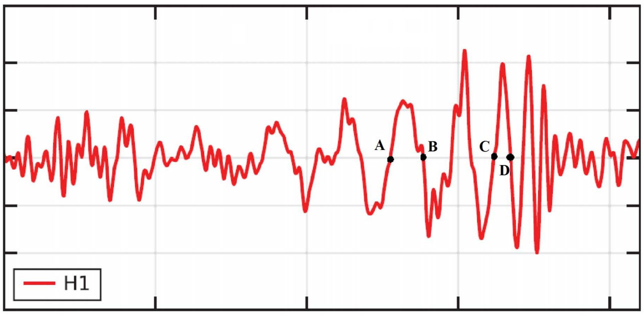
$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \chi F(t)^a \qquad \Rightarrow \qquad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0) \;, \tag{11}$$

όπου χ είναι μια σταθερά και t_0 μια σταθερά ολοκλήρωσης, δείξτε ότι η σχέση (10) υποδηλώνει η συχνότητα των GW είναι

$$f_\mathrm{GW}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \tag{12}$$

και προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς p.

Στις 14 Σεπτεμβρίου 2015 καταγράφηκε το συμβάν GW150914 από τους ανιχνευτές του LIGO, αποτελούμενους από δύο βραχίονες σχήματος L, καθένας μήκους 4 km. Το σχετικό μήκος των βραχιόνων άλλαζε με τον τρόπο που φαίνεται στην Εικ. 1. Οι βραχίονες του ανιχνευτή ανταποκρίνονται γραμμικά στη διέλευση ενός βαρυτικού κύματος, και το μοτίβο ανταπόκρισης προσεγγίζει μορφολογικά το κύμα. Αυτό το κύμα δημιουργήθηκε από δύο μαύρες τρύπες σε σχεδόν κυκλικές τροχιές. Η απώλεια ενέργειας μέσω της βαρυτικής ακτινοβολίας προκάλεσε τη συρρίκνωση της τροχιάς και οδήγησε τελικά στη σύγκρουση των μαύρων τρυπών. Το σημείο σύγκρουσης αντιστοιχεί χοντρικά στο μέγιστο του σήματος μετά το σημείο D, στην Εικ. 1.



Εικόνα 1. Τάση παραμόρφωσης, δηλ. σχετική μεταβολή του μεγέθους κάθε βραχίονα στον ανιχνευτή H1 του LIGO. Ο οριζόντιος είναι άξονας χρόνου και τα σημεία A, B, C, D είναι οι στιγμές $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ s αντίστοιχα.

B.5 Από την εικόνα εκτιμήστε, την τιμή της $f_{\text{GW}}(t)$ για 1.0pt

$$t_{\overline{\text{AB}}} = \frac{t_{\text{B}} + t_{\text{A}}}{2} \qquad \text{και} \qquad t_{\overline{\text{CD}}} = \frac{t_{\text{D}} + t_{\text{C}}}{2}\,. \tag{13}$$

Υποθέτοντας ότι η σχέση (12) εφαρμόζεται μέχρι τη στιγμή της σύγκρουσης (κάτι που δεν ισχύει στην πραγματικότητα) και ότι τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες, εκτιμήστε την chirp mass M_c και την ολική μάζα του συστήματος, σε συνάρτηση με τη μάζα του Ήλιου $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

B.6 Εκτιμήστε την ελάχιστη απόσταση των τροχιών των δύο μαζών τη στιγμή $t_{\overline{\text{CD}}}$. Από αυτή εκτιμήστε τη μέγιστη τιμή μεγέθους R_{max}, για κάθε αντικείμενο. Βρείτε το λόγο $R_{\odot}/R_{\text{max}}$ για να συγκρίνετε το μέγεθος αυτό με την ακτίνα του Ήλιου $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5$ km. Επίσης εκτιμήστε τις επιτρόχιες ταχύτητες v_{col} την ίδια στιγμή, συγκρίνοντάς τη με την ταχύτητα του φωτός v_{col}/c, διαπιστώνοντας ότι πράγματι πρόκειται για σώματα ιδιαιτέρως μεγάλης πυκνότητας, κινούμενα με ιδιαιτέρως μεγάλη ταχύτητα! 1.0pt

LIGO-GW150914 (10 points)

Μέρος A: Νευτώνιες τροχιές (υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων) (3.0 μονάδες)

A.1 (1.0 pt)

$n =$

$\alpha =$

A.2 (1.0 pt)

$A(\mu, \Omega, L) =$

A.3 (1.0 pt)

$\beta =$

Μέρος B: Εισάγοντας την σχετικιστική προσέγγιση (7.0 μονάδες)

B.1 (1.0 pt)

$k =$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$

$c_{12} =$ $c_{13} =$ $c_{23} =$

$c_{21} =$ $c_{22} =$ $c_{23} =$

$c_{31} =$ $c_{32} =$ $c_{33} =$

B.2 (1.0 pt)

$\xi =$

B.3 (1.0 pt)

M_{c}=

B.4 (2.0 pt)

$p =$

B.5 (1.0 pt)

$M_{\mathrm{c}} \simeq$ $M \simeq$

B.6 (1.0 pt)

$L \simeq$ $\frac{R_{\odot}}{R_{\mathrm{max}}} \simeq$ $\frac{v_{\mathrm{col}}}{c} \simeq$