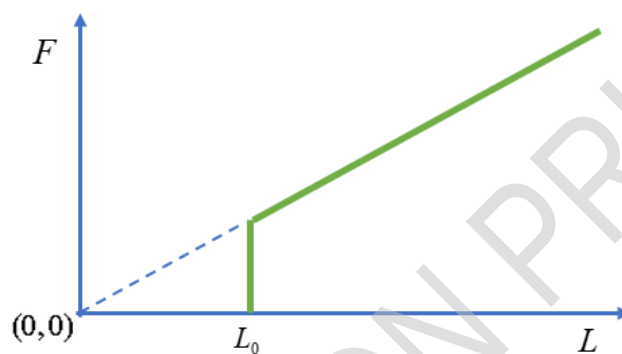


Ελατήρια μηδενικού ενεργού μήκους και ευλύγιστα (slinky) σπειρώματα

Το ελατήριο μηδενικού ενεργού μήκους (Zero Length Spring ή ZLS) είναι εκείνο στο οποίο η δύναμη είναι ανάλογη του μήκους του, $F = kL$, για $L > L_0$ όπου L_0 είναι το ελάχιστο (φυσικό) μήκος του ελατηρίου. Το γράφημα 1 παρουσιάζει τη δύναμη F του ZLS συναρτήσει του μήκους του L . Η κλίση της ευθείας ισούται με την σταθερά σκληρότητας του ελατηρίου k .



Γράφημα 1: Σχέση μεταξύ δύναμης ελατηρίου F και του μήκους του L .

Το ZLS είναι χρήσιμο στη σειсмоγραφία και επιτρέπει τη λήψη μεγάλης ακρίβειας μετρήσεων στις μεταβολές της επιτάχυνσης της βαρύτητας g . Στο πρόβλημα αυτό θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα ομογενές ZLS του οποίου το βάρος Mg υπερβαίνει το γινόμενο kL_0 . Μπορούμε να ορίσουμε μια αδιάστατη ποσότητα α , που προκύπτει από το λόγο, $\alpha = kL_0/Mg < 1$ για να χαρακτηρίσουμε τη σχετική σκληρότητα του ελατηρίου. Τα πολύχρωμα, μαλακά ελατήρια που πωλούνται ως παιχνίδια, είναι γνωστά και ως "slinky" και μπορεί να είναι (χωρίς αυτό να ισχύει υποχρεωτικά για όλα) ελατήρια ZLS.

Μέρος A: Στατική μελέτη (3.0 points)

A.1 Θεωρείστε τμήμα μήκους Δl ενός ZLS, το οποίο, ενώ βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, δέχεται μία δύναμη F , η οποία το επιμηκύνει, υπό συνθήκες μηδενικής βαρύτητας. Να υπολογίσετε το τελικό μήκος Δy που θα αποκτήσει το τμήμα του ελατηρίου συναρτήσει των F , Δl και των παραμέτρων του ελατηρίου. 0.5pt

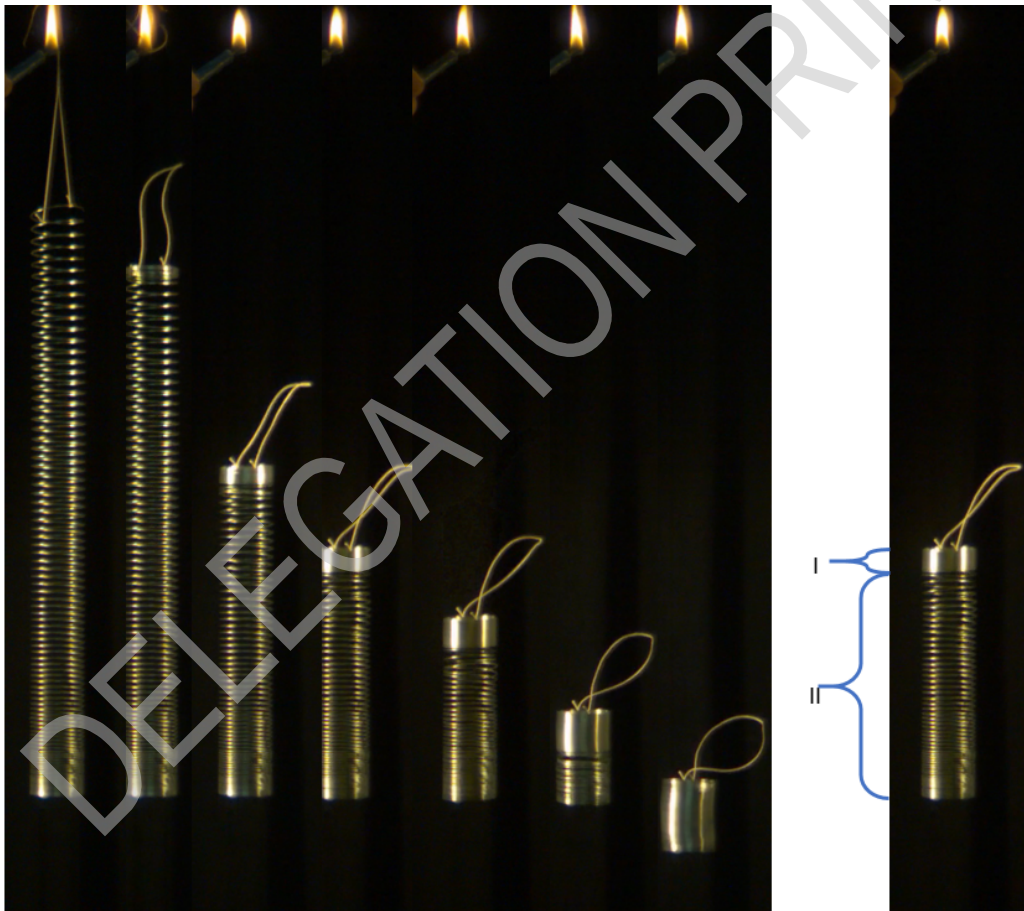
A.2 Για ένα τμήμα του ZLS μήκους Δl , να υπολογίσετε το έργο ΔW που απαιτείται για να επιμηκυνθεί από το αρχικό του μήκος Δl στο τελικό μήκος Δy . 0.5pt

Σε αυτό το πρόβλημα, θα αναφερόμαστε σε ένα σημείο του ελατηρίου χρησιμοποιώντας την απόστασή του l , για την οποία ισχύει $0 \leq l \leq L_0$, την οποία μετράμε από το κάτω άκρο του, όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος. Συγκεκριμένα, για κάθε σημείο του ελατηρίου, το l παραμένει αμετάβλητο καθώς το ελατήριο επιμηκύνεται.

A.3 Υποθέστε ότι αναρτούμε το ελατήριο από την κορυφή του, με αποτέλεσμα αυτό να επιμηκύνεται εξ αιτίας του βάρους του. Να υπολογίσετε το ολικό μήκος H του ελατηρίου, όταν βρίσκεται σε ισορροπία. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει των παραμέτρων L_0 και α . 2.0pt

Μέρος Β: Δυναμική μελέτη (5.5 points)

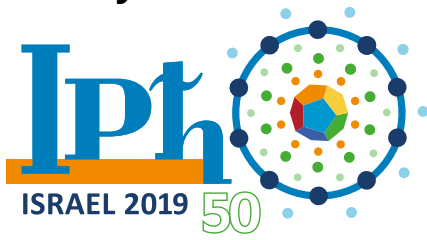
Πειραματικά αποδεικνύεται πως όταν ένα κρεμασμένο ελατήριο (που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας) ελευθερωθεί, η συσπείρωσή του πραγματοποιείται σταδιακά ξεκινώντας από το πάνω τμήμα του, ενώ το κάτω μέρος παραμένει ακίνητο (βλ. εικόνα 2). Με την πάροδο του χρόνου, το συσπειρούμενο τμήμα κινείται ως στερεό σώμα ενσωματώνοντας επιπλέον σπείρες από το υπόλοιπο ελατήριο, ενώ το μήκος του ακίνητου τμήματος μειώνεται διαρκώς. Κάθε σημείο του ελατηρίου αρχίζει να κινείται μόνο όταν το κινούμενο τμήμα φθάνει στη θέση του σημείου αυτού. Το κάτω μέρος του ελατηρίου αρχίζει να κινείται μόνο όταν το ελατήριο συσπειρωθεί εντελώς, φθάνοντας στο φυσικό του μήκος L_0 . Από τη στιγμή αυτή και μετά, το ελατήριο συνεχίζει να πέφτει προς το έδαφος χωρίς άλλη μεταβολή στο μήκος του, ως ένα στερεό σώμα, υπό την επίδραση της βαρύτητας.



Εικόνα 2: Αριστερά: ακολουθία εικόνων παρμένων κατά την ελεύθερη πτώση του ελατηρίου slinky. Δεξιά: Το κινούμενο τμήμα I και το ακίνητο τμήμα II κατά την ελεύθερη πτώση του ελατηρίου.

Στα υπόλοιπα ερωτήματα του προβλήματος αυτού, παρακαλείστε να βασίσετε τις λύσεις σας στο μοντέλο που μόλις περιγράψαμε.

Μπορείτε να αγνοήσετε την αντίσταση του αέρα αλλά το φυσικό μήκος του ελατηρίου L_0 δεν είναι αμελητέο.



- B.1** Να εκφράσετε το χρονικό διάστημα t_c που χρειάζεται από τη στιγμή που ελευθερώνεται το ελατήριο, μέχρι να συσπειρωθεί εντελώς και να φθάσει στο φυσικό του μήκος L_0 . Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει των παραμέτρων L_0 , g και α . 2.5pt
 Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του χρονικού διαστήματος t_c , αν το ελατήριο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
 $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ και $M = 0.201 \text{ kg}$, ενώ για την επιτάχυνση της βαρύτητας g θα χρησιμοποιήσετε την τιμή 9.80 m/s^2 .

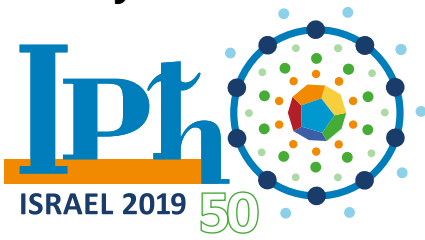
- B.2** Σε αυτό το ερώτημα η απόσταση l δηλώνει τη συντεταγμένη του συνόρου μεταξύ των τμημάτων I και II (κινούμενο και ακίνητο τμήμα αντίστοιχα, σχήμα 2). Σε κάποια χρονική στιγμή, που θεωρούμε ότι υπάρχει ακόμη ακίνητο τμήμα, αυτό έχει μάζα $m(l) = \frac{l}{L_0} M$ και όλα τα σημεία του κινούμενου τμήματος έχουν κοινή στιγμιαία ταχύτητα $v_1(l)$. Να δείξετε ότι τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (που υπάρχει ακόμη ακίνητο τμήμα) η ταχύτητα του κινούμενου μέρους είναι $v_1(l) = \sqrt{Al + B}$. Να εκφράσετε τις σταθερές A και B συναρτήσει των παραμέτρων L_0 , g και α . 2.5pt

- B.3** Με βάση την απάντησή σας στο ερώτημα B.2, να υπολογίσετε την ελάχιστη ταχύτητα v_{\min} του κινούμενου μέρους του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της κίνησής του, μετά την απελευθέρωσή του και πριν προσκρούσει στο έδαφος. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των παραμέτρων L_0 , α , A και B. 0.5pt

Μέρος C: Ενεργειακή μελέτη (1.5 points)

- C.1** Να γράψετε μια έκφραση της παραγόμενης θερμότητας Q κατά τη μετατροπή της μηχανικής ενέργειας από τη στιγμή που ελευθερώνεται το ελατήριο μέχρι τη στιγμή ακριβώς πριν την κρούση με το έδαφος. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των παραμέτρων L_0 , M , g και α . 1.5pt

Theory



A1-1

Greek (Greece)

Ελατήρια μηδενικού ενεργού μήκους και ευλύγιστα (slinky) σπειρώματα - Φύλλο Απαντήσεων

Μέρος Α: Στατική μελέτη (3.0 points)

A.1 (0.5 pt)

$$\Delta y =$$

A.2 (0.5 pt)

$$\Delta W =$$

A.3 (2.0 pt)

$$H =$$

Μέρος Β: Δυναμική μελέτη (5.5 points)

B.1 (2.5 pt)

$$t_c =$$

$$t_c =$$

B.2 (2.5 pt)

$$A =$$

$$B =$$

B.3 (0.5 pt)

$$v_{\min} =$$

Μέρος C: Ενεργειακή μελέτη (1.5 points)

C.1 (1.5 pt)

$$Q =$$