

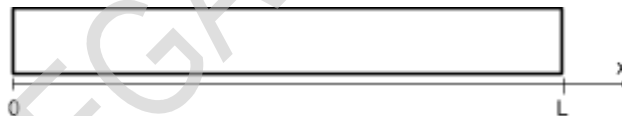
Θερμοακουστική μηχανή

Η Θερμοακουστική μηχανή είναι μια συσκευή που μετατρέπει θερμότητα σε ακουστική (ηχητική) ενέργεια ή ηχητικά κύματα - που είναι μια μορφή μηχανικού έργου. Όπως συμβαίνει σε πολλές άλλες θερμικές μηχανές, η θερμοακουστική μηχανή μπορεί να λειτουργήσει αντίστροφα, ώστε να μετατραπεί σε ψυκτική μηχανή (π.χ. ψυγείο), χρησιμοποιώντας τον ήχο για να αντλήσει θερμότητα από μια θερμή προς μια ψυχρή δεξαμενή. Οι υψηλές συχνότητες λειτουργίας μειώνουν την αγωγή θερμότητας και εξαλείφουν την ανάγκη για τοποθέτηση της μηχανής σε θερμομονωτικό περίβλημα. Σε αντίθεση με άλλους τύπους μηχανών, η θερμοακουστική μηχανή δεν έχει κινούμενα μέρη, με εξαίρεση το ίδιο το κινούμενο ρευστό.

Οι θερμοακουστικές μηχανές συνήθως έχουν συντελεστή απόδοσης μικρότερο εκείνου άλλου τύπου μηχανών, αλλά πλεονεκτούν σε κόστος κατασκευής και συντήρησης. Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει εφαρμογές με ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, όπως εργοστάσια μετατροπής της ηλιακής σε θερμική ενέργεια και εκμετάλλευση της αποβαλλόμενης θερμότητας. Η ανάλυσή μας θα εστιαστεί στην παραγωγή ακουστικής ενέργειας εντός του συστήματος, αγνοώντας την μεταφορά ή μετατροπή της για την τροφοδοσία άλλων συσκευών.

Μέρος A: Ηχητικό κύμα σε κλειστό σωλήνα (3.7 points)

Θεωρείστε ένα θερμομονωτικό σωλήνα μήκους L και εμβαδού διατομής S , η μεγάλη διάσταση του οποίου συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα x . Τα δύο άκρα του σωλήνα βρίσκονται στις θέσεις $x = 0$ και $x = L$. Ο σωλήνας είναι γεμάτος με ιδανικό αέριο και με τα δύο άκρα του σφραγισμένα. Σε κατάσταση ισορροπίας, το αέριο βρίσκεται σε θερμοκρασία T_0 , πίεση p_0 και έχει πυκνότητα ρ_0 . Υποθέστε ότι το ιξώδες μπορεί να αγνοηθεί και ότι τα μόρια του αερίου κινούνται μόνο κατά τον άξονα x . Οι υπόλοιπες ιδιότητες είναι ομοιόμορφες στους κάθετους άξονες y και z .



Σχήμα 1

- A.1** Όταν δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, τα μόρια του αερίου ταλαντώνονται κατά τον άξονα x με κυκλική συχνότητα ω . Το πλάτος των ταλαντώσεων εξαρτάται από τη θέση ισορροπίας x κάθε μορίου κατά μήκος του σωλήνα. Η διαμήκης απόκλιση (μετατόπιση) x κάθε μορίου του αερίου από τη θέση ισορροπίας του x , δίνεται από τη σχέση 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(παρακαλώ λάβετε υπόψη σας ότι με u συμβολίζεται εδώ η μετατόπιση ενός ενός στοιχείου του αερίου)

όπου $a \ll L$ είναι μια θετική σταθερά, $k = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματαριθμός και λ είναι το μήκος κύματος. Ποια είναι η μέγιστη τιμή λ_{\max} του μήκους κύματος σε αυτό το σύστημα;

Για το θέμα αυτό θεωρείστε ότι ισχύει $\lambda = \lambda_{\max}$.

Θεωρείστε ένα στενό τμήμα της συνολικής ποσότητας του αερίου που βρίσκεται σε ισορροπία και οριοθετείται από τις θέσεις x και $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Ως αποτέλεσμα του κύματος μετατόπισης του ερωτήματος

A.1, το τμήμα αυτό ταλαντώνεται κατά μήκος του άξονα x και υφίσταται μια μεταβολή του όγκου του καθώς και των τιμών άλλων θερμοδυναμικών μεγεθών.

Στη διάρκεια του επόμενου ερωτήματος, να θεωρήσετε πως όλες αυτές οι μεταβολές των θερμοδυναμικών μεγεθών είναι μικρές σε σύγκριση με τις τιμές ισορροπίας.

- A.2** Ο όγκος του τμήματος $V(x, t)$ ταλαντώνεται περί της τιμής ισορροπίας $V_0 = S\Delta x$ με βάση της εξίσωση 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Βρείτε μια έκφραση του $V_1(x)$ συναρτήσει των V_0 , a , k και x .

- A.3** Υποθέστε ότι η ολική πίεση του αερίου, ως αποτέλεσμα του ηχητικού κύματος, παίρνει την προσεγγιστική μορφή 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Συνοπολογίζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται το τμήμα του αερίου, βρείτε το πλάτος ταλάντωσης της πίεσης $p_1(x)$ συναρτήσει της θέσης x , της πυκνότητας ρ_0 στην κατάσταση ισορροπίας, το πλάτος μετατόπισης a και τις κυματικές παραμέτρους k και ω .

Στην περιοχή των ακουστικών συχνοτήτων, η θερμική αγωγιμότητα του αερίου μπορεί να αγνοηθεί. Θα θεωρήσουμε ότι η διαστολή και η συστολή των τμημάτων του αερίου πραγματοποιούνται εξ ολοκλήρου αδιαβατικά, υπακούοντας στην εξίσωση $pV^\gamma = \text{const}$, όπου γ είναι η αδιαβατική σταθερά.

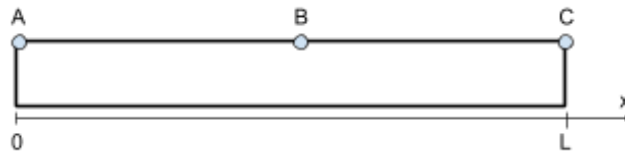
- A.4** Χρησιμοποιήστε την παραπάνω εξίσωση και τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος για να βρείτε μια έκφραση της ταχύτητας $c = \omega/k$ των ηχητικών κυμάτων μέσα στο σωλήνα με προσέγγιση πρωτοβάθμιων όρων. Εκφράστε την απάντησή σας με βάση την αδιαβατική σταθερά γ . 0.3pt

- A.5** Η μεταβολή της θερμοκρασίας του αερίου λόγω αδιαβατικής εκτόνωσης / συμπίεσης που προκαλεί το ηχητικό κύμα, γράφεται στη μορφή: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Υπολογίστε το πλάτος ταλάντωσης $T_1(x)$ της θερμοκρασίας συναρτήσει των ποσοτήτων T_0 , γ , a , k και x .

- A.6** Αποκλειστικά και μόνο για τις ανάγκες αυτού του ερωτήματος, υποθέτουμε μια ασθενή θερμική αλληλεπίδραση μεταξύ του σωλήνα και του αερίου. Ως αποτέλεσμα, το στάσιμο ηχητικό κύμα παραμένει σχεδόν αμετάβλητο, αλλά το αέριο μπορεί να ανταλλάσσει ένα μικρό ποσό θερμότητας με το σωλήνα. Η θέρμανση λόγω του ιξώδους μπορεί να αγνοηθεί. Για καθένα από τα σημεία του σχήματος 2 (A, C στα όρια του σωλήνα, B στο κέντρο) γράψτε αν η θερμοκρασία του σωλήνα στη θέση αυτή θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει σταθερή κατά τη διάρκεια μεγάλου χρονικού διαστήματος. 1.2pt

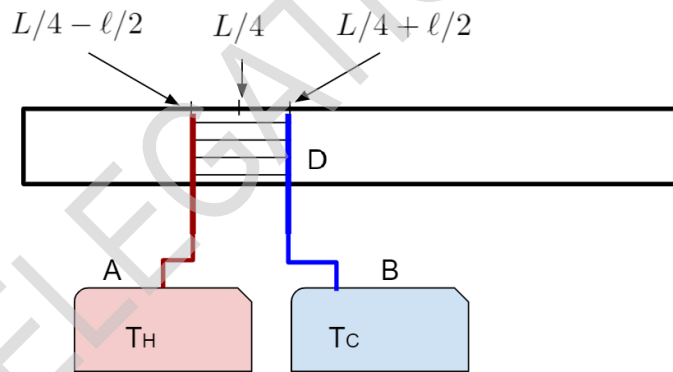


Σχήμα 2

Μέρος Β: Ενίσχυση ηχητικού κύματος λόγω επαφής με εξωτερική πηγή θερμότητας (6.3 points)

Μια στοίβα λεπτών, καλά διαχωρισμένων στερεών πλακών, τοποθετείται μέσα στο σωλήνα. Οι πλάκες της στοίβας τοποθετούνται παράλληλα προς τον άξονα του κυλίνδρου, ώστε να μην παρεμποδίζουν τη ροή του αερίου κατά μήκος του σωλήνα. Το κέντρο της στοίβας βρίσκεται στη θέση $x_0 = L/4$, και καλύπτει πλάτος ίσο προς $\ell \ll L$ κατά μήκος του άξονα του σωλήνα, καλύπτοντας πλήρως τη διατομή του. Τα δύο άκρα της στοίβας διατηρούνται σε θερμοκρασιακή διαφορά τ . Το αριστερό όριο της στοίβας, στη θέση $x_H = x_0 - \ell/2$, διατηρείται σε θερμοκρασία $T_H = T_0 + \tau/2$ χάρη σε μια εξωτερική δεξαμενή θερμότητας. Ταυτόχρονα, το δεξιό του άκρο, στη θέση $x_C = x_0 + \ell/2$, διατηρείται σε θερμοκρασία $T_C = T_0 - \tau/2$.

Η στοίβα επιτρέπει μια μικρή διαμήκη ροή θερμότητας, ώστε να διατηρείται σταθερή η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των άκρων της στοίβας, δηλ. να ισχύει $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.



Εικόνα 3. Μια σχηματική αναπαράσταση του συστήματος. Τα (A) και (B) αντιστοιχούν στη θερμή και την ψυχρή δεξαμενή αντίστοιχα. Με (D) συμβολίζεται η στοίβα.

Για να αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο η θερμική επαφή ανάμεσα στη στοίβα και το αέριο επιδρά στα ηχητικά κύματα εντός του σωλήνα, θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, όλες οι αλλαγές των θερμοδυναμικών ποσοτήτων, θεωρούνται μικρές σε σύγκριση με τις τιμές στην κατάσταση ισορροπίας.
- Το σύστημα λειτουργεί στη θεμελιώδη (ελάχιστη) συχνότητα, δηλ. στο μέγιστο μήκος κύματος. Η κατάσταση αυτή επηρεάζεται ελάχιστα από την παρουσία της στοίβας.
- Το μήκος της στοίβας είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος, δηλ. $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, και μπορεί να βρίσκεται σε, συγκριτικά προς το μέγεθός της, μεγάλες αποστάσεις από τις θέσεις κοιλίας και δεσμού. Ως αποτέλεσμα είναι δυνατό η μετατόπιση $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ και η πίεση $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ να θεωρηθούν ομοιόμορφες κατά μήκος της στοίβας.

- Μπορούμε να αμελήσουμε τις επιδράσεις από τα τμήματα του αερίου που κινούνται από και προς τις πλάκες της στοίβας.
- Η θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ των ορίων των πλακών, ή, αλλιώς, μεταξύ της θερμής και της ψυχρής δεξαμενής, είναι μικρή σε σύγκριση με την απόλυτη θερμοκρασία, δηλ. $\tau \ll T_0$.
- Οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας του αερίου, της στοίβας και του σωλήνα είναι αμελητέοι. Να θεωρήσετε ότι η θερμότητα διαδίδεται αποκλειστικά λόγω της κίνησης του αερίου και λόγω της μεταφοράς μεταξύ του αερίου και της στοίβας.

B.1 Consider a specific parcel of gas in the region of the stack, originally at $x_0 = L/4$. As the parcel moves within the stack, the local temperature of the nearby part of the stack changes as follows: 0.4pt

Θεωρείστε ένα συγκεκριμένο τμήμα της συνολικής ποσότητας του αερίου στην περιοχή της στοίβας, που αρχικώς βρίσκεται στη θέση $x_0 = L/4$. Καθώς το τμήμα αυτό κινείται μέσα στην στοίβα, η τοπική θερμοκρασία του γειτονικού τμήματος μεταβάλλεται ως εξής:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Εκφράστε την T_{st} συναρτήσει των a , τ και ℓ .

B.2 Πάνω από ποια τιμή κρίσιμης διαφοράς θερμοκρασίας τ_{cr} το αέριο θα μεταφέρει θερμότητα από τη θερμή δεξαμενή προς την ψυχρή; Εκφράστε την τ_{cr} συναρτήσει των T_0 , γ , k και ℓ . 1.0pt

B.3 Βρείτε τη γενική προσεγγιστική έκφραση για τη ροή θερμότητας $\frac{dQ}{dt}$ σε ένα μικρό τμήμα αερίου ως γραμμική συνάρτηση του όγκου του και του ρυθμού μεταβολής της πίεσης. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής του όγκου $\frac{dV}{dt}$, του ρυθμού μεταβολής της πίεσης $\frac{dp}{dt}$, τις τιμές πίεσης p_0 και όγκου V_0 στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας και του συντελεστή γ . (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την έκφραση της γραμμομοριακής ειδικής θερμότητας υπό σταθερό όγκο $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, όπου R η σταθερά των αερίων.) 0.8pt

Ο περιορισμένος ρυθμός ροής της θερμότητας μεταξύ του τμήματος αερίου και της στοίβας, προκαλεί μια διαφορά φάσης μεταξύ πίεσης και όγκου του τμήματος. Θα δούμε πώς, εξ αιτίας αυτής της διαφοράς φάσης, παράγεται έργο

Ας υποθέσουμε ότι η θερμική ροή που εισέρχεται στο τμήμα του αερίου και εξέρχεται από τη στοίβα είναι ανάλογη προς τη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο τμήμα αερίου και στις γειτονικές προς αυτό περιοχές της στοίβας και, κατά προσέγγιση δίνονται από τη σχέση $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Εδώ T_1 και T_{st} είναι τα πλάτη ταλάντωσης της θερμοκρασίας του τμήματος αερίου και των γειτονικών περιοχών της στοίβας από τα ερωτήματα A.5 και B.1, αντίστοιχα και $\beta > 0$ είναι μια σταθερά. Υποθέστε ότι για τις συχνότητες λειτουργίας της μηχανής η μεταβολή της θερμοκρασίας του αερίου ως αποτέλεσμα αυτής της ροής θερμότητας είναι αμελητέα σε σύγκριση με τις T_1 και T_{st} .

- B.4** Προκειμένου να υπολογίσουμε το έργο, θα θεωρήσουμε μια μεταβολή του όγκου του κινούμενου τμήματος ως αποτέλεσμα τη θερμικής επαφής με τη στοίβα. Εκφράζουμε τις τιμές της πίεσης και του όγκου του τμήματος που βρίσκεται υπό την επίδραση της στοίβας ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Δεδομένων των τιμών p_a και p_b , υπολογίστε τις ποσότητες V_a και V_b . Εκφράστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των όρων $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a$ και ℓ .

- B.5** Υπολογίστε μια προσεγγιστική έκφραση για το ακουστικό έργο ανά μονάδα όγκου w που παράγει το τμήμα αερίου κατά τη διάρκεια ενός κύκλου (μιας περιόδου). Υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε όλο τον όγκο της στοίβας για να βρείτε το ολικό έργο \dot{W}_{tot} που παράγει το αέριο. Εκφράστε το έργο \dot{W}_{tot} συναρτήσει των $\gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, k$ και S .

- B.6** Υπολογίστε μια προσεγγιστική έκφραση της θερμότητας Q_{tot} που μεταφέρεται από την αριστερή πλευρά του επιπέδου στη θέση $x = x_0$ προς τη δεξιά, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει των $\tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, S, \ell$.
(Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $j = Q \frac{du}{dt}$ για το ρυθμό διάδοσης θερμότητας.)

- B.7** Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης η της θερμοακουστικής μηχανής. Ο συντελεστής απόδοσης ορίζεται ως ο λόγος του παραγόμενου ακουστικού έργου προς την ποσότητα προσλαμβανόμενης θερμότητας από τη θερμή δεξαμενή. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει της θερμοκρασιακής διαφοράς τ μεταξύ της θερμής και της ψυχρής δεξαμενής, την κρίσιμη θερμοκρασιακή διαφορά τ_{cr} και του συντελεστή απόδοσης μιας θερμικής μηχανής Carnot που δίνεται από τη σχέση $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.

Θερμοακουστική μηχανή - Φύλλο Απαντήσεων

Μέρος A: Ηχητικό κύμα σε κλειστό σωλήνα (3.7 points)

A.1 (0.3 pt)

$$\lambda_{\max} =$$

A.2 (0.5 pt)

$$V_1(x) =$$

A.3 (0.7 pt)

$$p_1(x) =$$

A.4 (0.3 pt)

$$c =$$

A.5 (0.7 pt)

$$T_1(x) =$$

A.6 (1.2 pt)

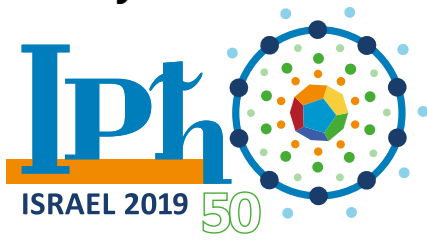
σημείο	αύξηση	μείωση	ίδιο
A			
B			
C			

Μέρος B: Ενίσχυση ηχητικού κύματος λόγω επαφής με εξωτερική πηγή θερμότητας (6.3 points)

B.1 (0.4 pt)

$$T_{st} =$$

Theory



A3-2

Greek (Greece)

B.2 (1.0 pt)

$$\tau_{\text{cr}} =$$

B.3 (0.8 pt)

$$\frac{dQ}{dt} =$$

B.4 (1.9 pt)

$$V_a =$$

$$V_b =$$

B.5 (0.8 pt)

$$W_{\text{tot}} =$$

B.6 (0.8 pt)

$$Q_{\text{tot}} =$$

B.7 (0.6 pt)

$$\eta =$$

DELEGATION PRINT