



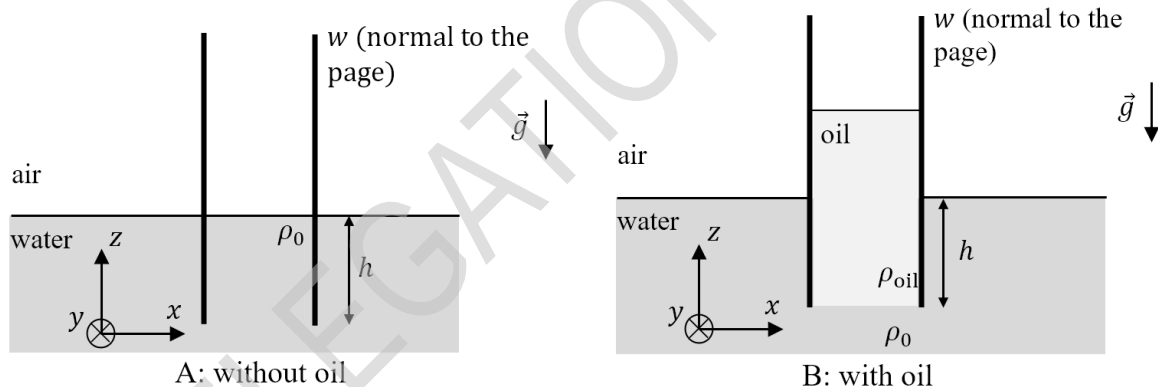
Πλανητική Φυσική (10 μονάδες)

Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται με το εσωτερικό των πλανητών και αποτελείται από δύο ανεξάρτητα μέρη. Οι επιδράσεις της καμπυλότητας της επιφάνειας των πλανητών θεωρούνται αμελητέες. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη σχέση:

$$(1 + x)^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon x, \text{ when } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Μέρος Α. Μεσοωκεάνια ράχη (Ωκεάνια Κορυφογραμμή) (5.0 μονάδες)

Θεωρήστε ένα μεγάλο δοχείο με νερό το οποίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Δύο πλάκες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, παράλληλες μεταξύ τους, τοποθετούνται κατακόρυφα κατά τρόπο που να μην είναι δυνατό να μετακινηθούν μέσα στο δοχείο και έτσι ώστε τα κατακόρυφα άκρα τους να εφάπτονται χωρίς κενό με τα κατακόρυφα τοιχώματα του δοχείου. Μήκος h κάθε μίας πλάκας είναι βυθισμένο στο νερό (Εικ. 1). Το πλάτος των πλακών κατά μήκος του άξονα y όπως αυτός σημειώνεται στο σχήμα ορίζουν το επίπεδο w . Θεωρήστε ότι κανένα υγρό δεν μπορεί να εισέλθει ή να εξέλθει στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες όσο και από τα τοιχώματα του δοχείου. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ_0 .



Εικόνα 1. Παράλληλες πλάκες βυθισμένες σε νερό.

Λάδι πυκνότητας ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) χύνεται στο χώρο μεταξύ των πλακών μέχρι το χαμηλότερο επίπεδο λαδιού να φτάσει στα κάτω άκρα των πλακών. Να θεωρήσετε ότι τόσο τα τοιχώματα των δύο πλακών όσο και οι άκρες των τοιχωμάτων του δοχείου εκτείνονται σε αρκετό ύψος ώστε να μην υπάρχει περίπτωση να υπερχειλίσει το λάδι. Να αγνοήσετε τα φαινόμενα που οφείλονται στην επιφανειακή τάση ή στην ανάμιξη των υγρών στο όριο της διαχωριστικής τους επιφάνειας.

A.1 Να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα F_x της συνισταμένης δύναμης που δρα στην δεξιά πλάκα (μέτρο και κατεύθυνση). 0.8pt

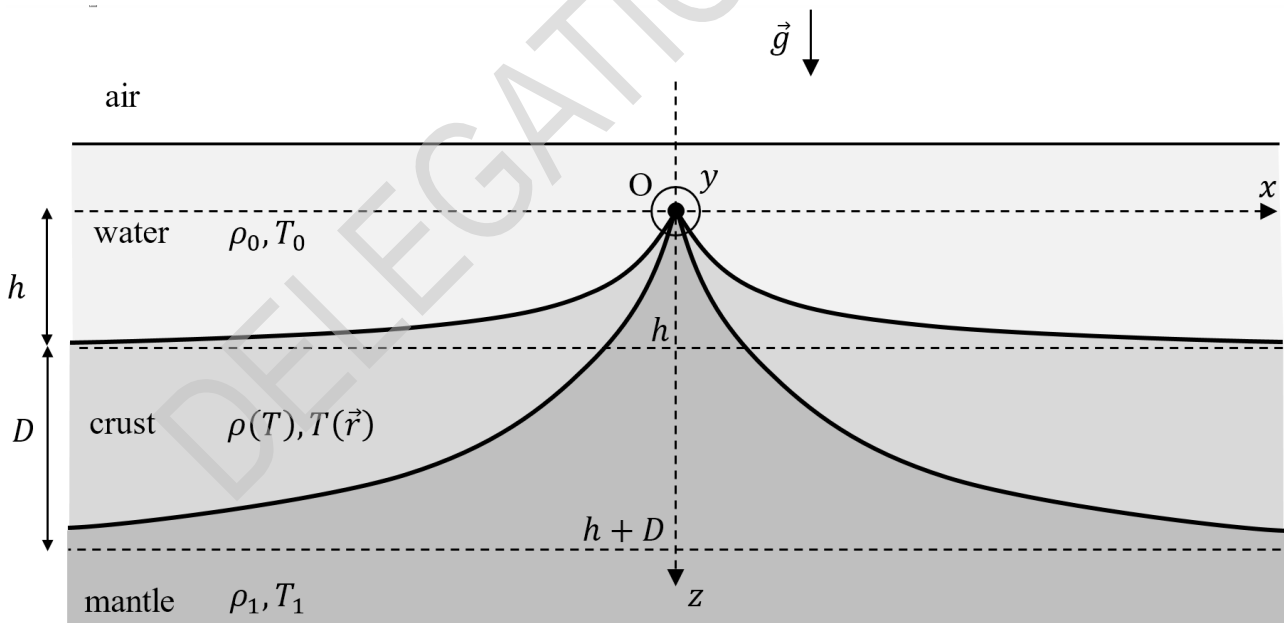
Στην Εικ. 2 φαίνεται η διατομή μιας μεσοωκεάνιας ράχης. Στη μεσοωκεάνια ράχη διακρίνονται τα ακόλουθα στρώματα: (i) μανδύας, (ii) φλοιός και (iii) νερό του ωκεανού. Ο μανδύας αποτελείται από πετρώματα που υποθέτουμε ότι μπορούν να ρέουν σε γεωλογικές χρονικές κλίμακες και επομένως, σε αυτό το πρόβλημα θα αντιμετωπίζεται ως υγρό. Το πάχος του φλοιού είναι πολύ μικρότερο από τη χαρακτηριστική κλίμακα μήκους της x

-διεύθυνσης, ως εκ τούτου, ο φλοιός συμπεριφέρεται ως πλάκα που μπορεί να κάμπτεται ελεύθερα. Με μεγάλη ακρίβεια, μια τέτοια ράχη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα δισδιάστατο σύστημα, το οποίο

είναι κάθετο στο επίπεδο της Εικ. 2 και κατά μήκος του άξονα y δεν μεταβάλλεται κάποια από τις μεταβλητές. Να υποθέσετε ακόμα ότι το μήκος της κορυφογραμμής L κατά μήκος του άξονα y είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο μήκος εμφανίζεται στο πρόβλημα αυτό.

Να θεωρήσετε ότι στην κορυφή (κέντρο της ράχης) το πάχος του φλοιού είναι μηδέν. Όσο η απόσταση x δεξιά και αριστερά από το μέσο της ράχης αυξάνεται το πάχος του φλοιού αυξάνεται και τείνει προς την σταθερή τιμή D καθώς η απόσταση από το μέσο τείνει στο άπειρο, $x \rightarrow \infty$. Αντίστοιχα, όσο η απόσταση x δεξιά και αριστερά από το μέσο της ράχης αυξάνεται το βάθος του νερού του ωκεανού εκτείνεται κατά ύψος h κάτω από την κορυφή της ράχης O , την οποία να θεωρήσετε ως την αρχή του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσετε (Εικ. 2). Να θεωρήσετε ότι οι τιμές της πυκνότητας ρ_0 της θερμοκρασίας του νερού T_0 , της πυκνότητας του μανδύα ρ_1 καθώς και της θερμοκρασίας του μανδύα T_1 είναι όλες σταθερές στον χώρο και στον χρόνο. Η θερμοκρασία του φλοιού T είναι επίσης ανεξάρτητη από το χρόνο αλλά μπορεί να εξαρτάται από τη θέση.

Είναι γνωστό, με μεγάλη ακρίβεια, ότι το υλικό του φλοιού διαστέλλεται γραμμικά ανάλογα με τη θερμοκρασία T . Με δεδομένο ότι τόσο η θερμοκρασία του νερού όσο του μανδύα είναι σταθερές, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσετε μια τροποποιημένη εκδοχή του συντελεστή θερμικής διαστολής με βάση την αλλαγή κλίμακας. Έτσι για κάθε διάσταση θα ισχύει, $l(T) = l_1 [1 - k_l(T_1 - T) / (T_1 - T_0)]$, όπου l είναι το μήκος του τμήματος του υλικού του φλοιού, l_1 το αντίστοιχο μήκος του τμήματος σε θερμοκρασία T_1 , και k_l είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής με βάση την αλλαγή κλίμακας, τον οποίο να θεωρήσετε σταθερό.



Εικόνα 2. Μεσοωκεάνια Ράχη. Σημειώστε ότι ο άξονας z

έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.



- A.2** Υποθέτοντας ότι ο φλοιός είναι ισότροπος, να βρείτε την εξάρτηση της πυκνότητας ρ από την θερμοκρασία T . Να θεωρήσετε ότι $|k_l| \ll 1$ και να γράψετε την απάντησή σας σε προσεγγιστική μορφή 0.6pt

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

όπου οι όροι δεύτερης τάξης k_l^2 καθώς και ανώτερης αγνοούνται. Στη συνέχεια προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς k

Είναι γνωστό ότι $k > 0$. Επίσης, να θεωρήσετε σταθερή την τιμή του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κ του φλοιού. Κατά συνέπεια, πολύ μακριά από τον άξονα κορυφογραμμής η θερμοκρασία του φλοιού εξαρτάται γραμμικά από το βάθος.

- A.3** Να θεωρήσετε ότι ο μανδύας όπως και το νερό συμπεριφέρονται ως ασυμπίεστα υγρά σε υδροστατική ισορροπία και να υπολογίσετε την σταθερή τιμή D στην οποία τείνει το πάχος του φλοιού, (καθώς η απόσταση από το μέσο της ράχης τείνει στο άπειρο) σε σχέση με τους όρους h , ρ_0 , ρ_1 , και k . Να αγνοήσετε την όποια κίνηση του υλικού. 1.1pt

- A.4** Να εκφράσετε συναρτήσει των ρ_0 , ρ_1 , h , L , k και g την συνισταμένη οριζόντια δύναμη F η οποία δρα στο δεξί μισό του φλοιού ($x > 0$). Να παραληφθούν οι όροι ανώτερης τάξης για την σταθερά k (να χρησιμοποιηθεί στη χαμηλότερη τάξη). 1.6pt

Να υποθέσετε ότι ο φλοιός της Γης είναι θερμικά μονωμένος από τα υπόλοιπα γήινα στρώματα. Ως αποτέλεσμα της θερμικής αγωγής οι θερμοκρασίες του ανώτερου και του κατώτερου στρώματος του φλοιού τείνουν να πλησιάσουν μεταξύ τους μέχρι ο φλοιός να φτάσει σε θερμική ισορροπία. Η ειδική θερμότητα (θερμοχωρητικότητα) του φλοιού είναι c και μπορεί να θεωρηθεί σταθερή.

- A.5** Να χρησιμοποιήσετε διαστατική ανάλυση ή ανάλυση τάξης μεγέθους και να εκτιμήσετε το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα τ στο οποίο η διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο ανώτερο και στο κατώτερο στρώμα του φλοιού, μακριά από το μέσο της ράχης τείνει να φτάσει στο μηδέν. Να υποθέσετε ότι το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα τ δεν εξαρτάται από τις αρχικές θερμοκρασίες της πάνω και της κάτω επιφάνειας του φλοιού. 0.9pt

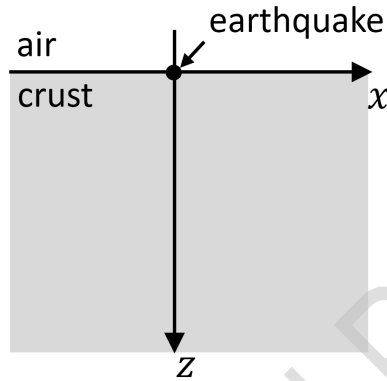
Μέρος Β. Σεισμικά κύματα σε ένα μέσο που αποτελείται από στρώματα (στρωματοποιημένο). (5.0 Μονάδες)

Να υποθέσετε ότι πραγματοποιείται μια σεισμική δόνηση μικρής διάρκειας στην επιφάνεια κάποιου πλανήτη. Να υποθέσετε ακόμα ότι τα σεισμικά κύματα εκπέμπονται από μια γραμμική πηγή που βρίσκεται κατά μήκος της ευθείας $z = x = 0$, όπου x είναι η οριζόντια συντεταγμένη και όπου z είναι το βάθος κάτω από την επιφάνεια (Εικ. 3). Ακόμα, να υποθέσετε ότι το μήκος της πηγής των κυμάτων είναι πολύ μεγαλύτερο από όποιο άλλο μήκος εμπλέκεται στο ερώτημα αυτό.

Ως αποτέλεσμα του σεισμού, εκπέμπονται διαμήκη κυμάτων P ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδο $x-z$, τα οποία έχουν θετική συνιστώσα κατά μήκος του άξονα z . Δεδομένου, ότι η θεωρία της διάδοσης των κυμάτων σε ένα στερεό είναι γενικά περίπλοκη, σε αυτό το πρόβλημα αγνοούμε όλα τα άλλα κύματα που εκπέμπονται κατά τη σεισμική δόνηση. Η στρωμάτωση του φλοιού του πλανήτη



έχει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα v των διαμήκων κυμάτων P να εξαρτάται από το βάθος z σύμφωνα με τη σχέση $v = v_0(1 + z/z_0)$, όπου το v_0 είναι η ταχύτητα στην επιφάνεια και z_0 είναι μια γνωστή θετική σταθερά.



Εικόνα 3. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στο μέρος Β.

- B.1** Να θεωρήσετε μια ακτίνα η οποία εκπέμπεται από τη σεισμική δόνηση, σχηματίζει αρχική γωνία $0 < \theta_0 < \pi/2$ με τον άξονα z και διαδίδεται στο επίπεδο $x-z$. 1.5pt
 Να προσδιορίσετε την οριζόντια συντεταγμένη $x_1(\theta_0) \neq 0$ στην οποία η ακτίνα μπορεί να ανιχνευθεί στην επιφάνεια του πλανήτη. Θεωρήστε γνωστό ότι η τροχιά της ακτίνας είναι ένα τόξο του κύκλου. Η απάντησή σας να δοθεί στη μορφή $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ όπου οι σταθερές A και b πρέπει να υπολογιστούν ($\cot\theta = 1/\varepsilon\phi\theta$).

Στην περίπτωση που δεν καταφέρατε να προσδιορίσετε τις σταθερές A και b , για τις ερωτήσεις που ακολουθούν να θεωρήσετε δεδομένο το αποτέλεσμα $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$. Να υποθέσετε ότι η συνολική ενέργεια ανά μονάδα μήκους που απελευθερώνεται από την πηγή υπό μορφή διαμήκων κυμάτων P στον φλοιό κατά τη διάρκεια της σεισμικής δόνησης είναι E , και ότι τα κύματα απορροφώνται πλήρως όταν φτάνουν στην επιφάνεια του πλανήτη από το εσωτερικό του.

- B.2** Να εξαγάγετε τη σχέση ανάμεσα στην ανά μονάδα εμβαδού πυκνότητα ενέργειας που απορροφάται από την επιφάνεια του πλανήτη $\varepsilon(x)$ και στην απόσταση x κατά μήκος της επιφάνειας. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varepsilon(x)$. 1.5pt

Στο εξής να θεωρείτε ότι τα κύματα ανακλώνται πλήρως όταν φτάνουν στο όριο της επιφάνειας του πλανήτη. Να φανταστείτε μια συσκευή κατά μήκος της ευθείας $z = x = 0$ της ίδιας γεωμετρικής μορφής με την πηγή των κυμάτων που αναφέρθηκε προηγουμένως. Η συσκευή έχει τη δυνατότητα να εκπέμπει διαμήκη κύματα P σε μια ελεύθερα επιλεγμένη γωνιακή κατανομή. Η συσκευή ρυθμίζεται ούτως ώστε να εκπέμπει ένα σήμα σε πολύ μικρό εύρος γωνιών εκπομπής. Συγκεκριμένα, η αρχική γωνία ανάμεσα στην ευθεία διάδοσης του σήματος και την κατακόρυφο εμπίπτει στο διάστημα $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ όπου $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ και $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.



- B.3** Να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση x_{\max} από την πηγή, και κατά μήκος της επιφάνειας του πλανήτη, στην οποία βρίσκεται το πιο απομακρυσμένο σημείο στο οποίο δεν φτάνει το σήμα. 2.0pt
Να γράψετε το αποτέλεσμα σε συνάρτηση με τους όρους θ_0 , $\delta\theta_0$ και άλλων σταθερών οι οποίες δοθήκαν προηγουμένως.

DELEGATION PRINT

**Πλανητική Φυσική (10 μονάδες)****Μέρος Α. Μεσοκεάνια Ράχη (Ωκεάνια κορυφογραμμή) (5.0 μονάδες)****A.1** (0.8 pt)

$$F_x =$$

A.2 (0.6 pt)

$$\rho(T) \approx$$

$$k =$$

A.3 (1.1 pt)

$$D =$$

A.4 (1.6 pt)

$$F \approx$$

A.5 (0.9 pt)

$$\tau =$$



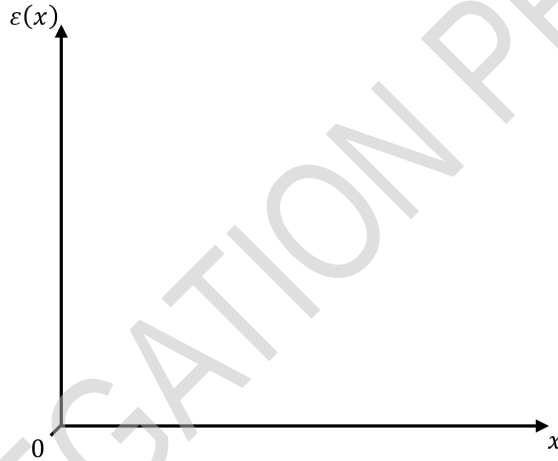
Μέρος Β. Σεισμικά κύματα σε ένα μέσο που αποτελείται από στρώματα (στρωματοποιημένο). (5.0 Μονάδες)

B.1 (1.5 pt)

$$x_1(\theta_0) =$$

B.2 (1.5 pt)

$$\varepsilon(x) =$$



B.3 (2.0 pt)

$$x_{\max} =$$



Planetary Physics (10 points)

Part A. Mid-ocean ridge (5.0 points)

A.1 (0.8 points)

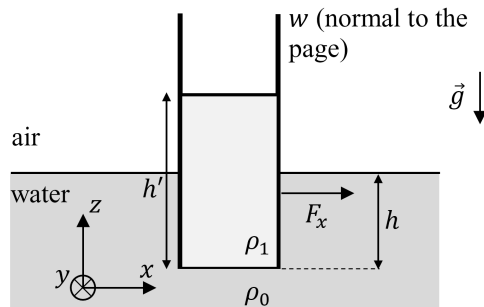


Figure 1

Let h' be the height of the column of oil (see Fig. 1). Then pressure at depth h below the water surface must be $p_h = \rho_0 g h = \rho_1 g h'$, from where $h' = \frac{\rho_0}{\rho_1} h$. Horizontal force on the plate $F_x = F_1 - F_0$, where the force due to new fluid is $F_1 = \frac{\rho_1 g h'}{2} \cdot h' w$ and the force due to water is $F_0 = \frac{\rho_0 g h}{2} \cdot h w$.

Combining all the equation above, we get

$$F_x = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \frac{\rho_0 g h^2 w}{2}.$$

A.1 (0.8 pt)

$$F_x = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \frac{\rho_0 g h^2 w}{2}.$$

A.2 (0.6 points)

Consider a rectangular mass element of the crust. Since relation $l(T) = l_1 [1 - k_l (T_1 - T) / (T_1 - T_0)]$ holds for all three dimensions of the solid, its volume V satisfies

$$V = V_1 \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^3,$$

where V_1 is the volume at $T = T_1$. If the mass of the element is m , density is then

$$\rho(T) = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_1} \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3} = \rho_1 \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3}.$$



Since $k_l \ll 1$, this can be approximated as

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right),$$

so that $k = 3k_l$.

A.2 (0.6 pt)

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right). \quad k = 3k_l.$$

A.3 (1.1 points)

Since mantle behaves like a fluid in hydrostatic equilibrium, pressure $p(x, z)$ at $z = h + D$ must be the same for all x . Therefore,

$$p(0, h + D) = p(\infty, h + D).$$

Similarly, we must have

$$p(0, 0) = p(\infty, 0).$$

Hence, the change in pressure between $z = 0$ and $z = \infty$ must be the same at both $x = 0$ and $x = \infty$. At the ridge axis

$$p(0, h + D) - p(0, 0) = \rho_1 g (h + D),$$

while far away

$$p(\infty, h + D) - p(\infty, 0) = \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho(T(\infty, z)) g dz.$$

Far away from the ridge axis the two surfaces of the crust are effectively horizontal, meaning that the law of heat conduction can be written as

$$\frac{dT}{dz} = \text{const.}$$

Hence, after applying the relevant temperature boundary conditions,

$$T(\infty, z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D}.$$

From all the equations above and by using the density formula given in the problem text,

$$\rho_1 g (h + D) = \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho_1 \left(1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz,$$

from where we straightforwardly obtain

$$D = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h.$$



A.3 (1.1 pt)

$$D = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h.$$

A.4 (1.6 points)

The net horizontal force on the half of the ridge is the difference between the pressure forces acting at $x = 0$ and $x = \infty$:

$$F = L \int_0^{h+D} (p(0, z) - p(\infty, z)) dz.$$

From considerations of the previous question, pressure at $x = 0$ is

$$p(0, z) = p(0, 0) + \rho_1 g z,$$

while very far away

$$p(\infty, z) = \begin{cases} p(\infty, 0) + \rho_0 g z & \text{if } 0 \leq z \leq h, \\ p(\infty, 0) + \rho_0 g h + \int_h^z \rho_1 \left(1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z' - h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz' & \text{if } h \leq z \leq h + D. \end{cases}$$

The equations above can be combined into

$$F = L \int_0^{h+D} (p(0, 0) + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p(\infty, 0) + \rho_0 g z) dz - \\ - L \int_h^{h+D} (p(\infty, 0) + \rho_0 g h) dz - L \int_h^{h+D} \left[\int_h^z \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{z' - h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz.$$

The double integral can be easily found either directly or by using a substitution $u = z - h$, $u' = z' - h$:

$$\int_h^{h+D} \left[\int_h^z \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{z' - h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz = \int_0^D \left[\int_0^u \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{u}{D} \right) \right) g du' \right] du$$

After a straightforward integration and using $p(0, 0) = p(\infty, 0)$ as well as the result of the previous question,

$$F = gL \left[\rho_1 \left(\frac{h^2}{2} + hD - \frac{kD^2}{3} \right) - \rho_0 \left(\frac{h^2}{2} + hD \right) \right] = gLh^2 (\rho_1 - \rho_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \right).$$

Since $k \ll 1$, the term with $\frac{1}{k}$ is of the leading order, hence, the required answer is

$$F \approx \frac{2gLh^2 (\rho_1 - \rho_0)^2}{3k \rho_1}.$$

**A.4** (1.6 pt)

$$F \approx \frac{2gLh^2}{3k} \frac{(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1}.$$

A.5 (0.9 points)

The timescale τ is expected to depend only on density of the crust ρ_1 , its specific heat c , thermal conductivity κ and thickness D . Hence, we can write $\tau = A\rho_1^\alpha c^\beta \kappa^\gamma D^\delta$, where A is a dimensionless constant. We will obtain the powers α – δ via dimensional analysis.

Define the symbols for different dimensions: L for length, M for mass, T for time and Θ for temperature. Then τ , ρ_1 , c , κ and D have dimensions T, ML^{-3} , $\text{L}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$, $\text{MLT}^{-3}\Theta^{-1}$ and L, respectively. The resulting set of linear equations to balance the powers of length, mass, time and temperature, respectively, is

$$\begin{cases} 0 = -3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta, \\ 0 = \alpha + \gamma, \\ 1 = -2\beta - 3\gamma, \\ 0 = -\beta - \gamma. \end{cases}$$

This gives $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$. Hence,

$$\tau = A \frac{c\rho_1 D^2}{\kappa}.$$

A.5 (0.9 pt)

$$\tau \approx \frac{c\rho_1 D^2}{\kappa}.$$

Part B. Seismic waves in a stratified medium (5.0 points)**B.1 (1.5 points)**

Seismic waves in this problem can be treated by using ray theory. Namely, their propagation is described by the Snell's law of refraction

$$n(0) \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta,$$

where the refractive index is

$$n(z) = \frac{c}{v(z)} = \frac{c}{v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right)}$$

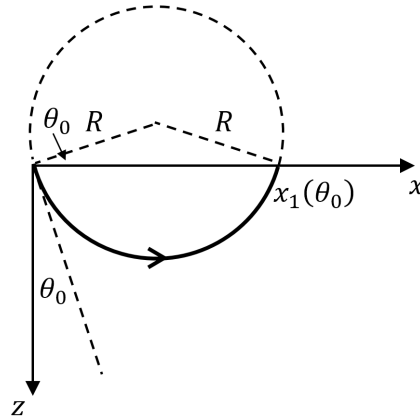


Figure 2

and c denotes the seismic wave speed in a material with refractive index $n = 1$. From the two equations above we have

$$v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \sin \theta_0 = v_0 \sin \theta.$$

Implicitly differentiating this equation gives

$$\frac{dz}{z_0} \sin \theta_0 = \cos \theta d\theta.$$

An infinitesimal ray path length dl is related to the change in the vertical coordinate via

$$dz = dl \cos \theta,$$

giving

$$dl = \frac{z_0}{\sin \theta_0} d\theta.$$

This is an equation of an arc of a circle of radius $R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}$ (see Fig. 2). Hence from simple geometry we get

$$x_1(\theta_0) = 2R \cos \theta_0,$$

i.e. $A = 2z_0$ and $b = 1$.

Alternatively, instead of considering an infinitesimal ray path length dl , one can obtain the answer by writing

$$\cot \theta = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}.$$

The first derivative can be eliminated via Snell's law, leading to

$$\cot \theta = \frac{z_0 \cos \theta}{\sin \theta_0} \frac{d\theta}{dx},$$

which can be integrated to get

$$x_1 = -\frac{z_0}{\sin \theta_0} \int_{\text{start}}^{\text{end}} d\cos \theta = \frac{2z_0 \cos \theta_0}{\sin \theta_0},$$



where we used Snell's law again to get that the ray has $\cos \theta = -\cos \theta_0$ at the point where it reaches the surface.

B.1 (1.5 pt)

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0.$$

B.2 (1.5 points)

In two dimensions, $\frac{E}{\pi} d\theta_0$ is the energy carried by rays that are emitted within interval $[\theta_0, \theta_0 + d\theta_0)$. On the other hand, the energy carried by rays that arrive at $[x, x + dx)$ is εdx . Therefore,

$$\varepsilon = \frac{E}{\pi} \left| \frac{d\theta_0}{dx} \right|.$$

Using the result of question B.1,

$$\frac{dx}{d\theta_0} = -\frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)} = -Ab(1 + \cot^2(b\theta_0)) = -b(A^2 + x^2).$$

Hence,

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{\pi b(A^2 + x^2)} = \frac{E}{\pi(4z_0^2 + x^2)}.$$

This function is plotted in Fig. 3.

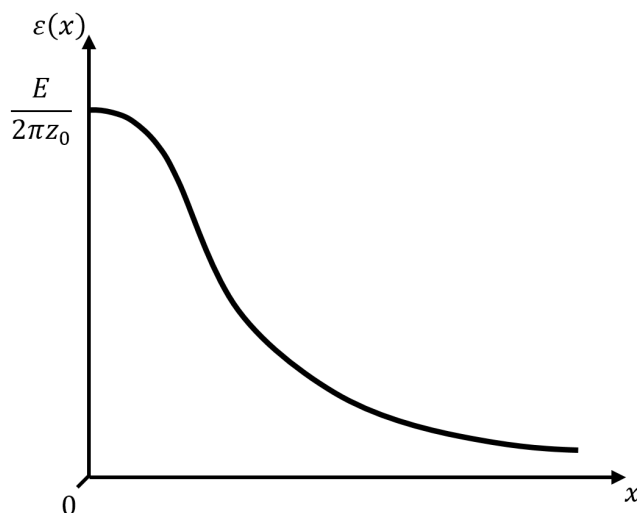


Figure 3. Plot of the function $\varepsilon(x)$.

B.2 (1.5 pt)

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{\pi b(A^2 + x^2)} = \frac{E}{\pi(4z_0^2 + x^2)}.$$

Sketch is shown in Fig. 3.

**B.3 (2.0 points)**

Define $x_- = x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right)$ and $x_+ = x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right)$. To the leading order in $\delta\theta_0$, $x_- \approx x_+ \approx x_1(\theta_0)$. With each reflection of the signal, the horizontal distance between the points where the edges of the signal reflect increases by $|x_+ - x_-| = x_- - x_+$. When moving along the positive x -axis, these zones get wider until they overlap. If this happens after N reflections, then

$$N \approx \frac{x_1(\theta_0)}{x_- - x_+},$$

where the approximate sign tends to equality as $\delta\theta_0 \rightarrow 0$.

The position where the zones start to overlap is at $x_{\max} = Nx_1(\theta_0)$. Therefore,

$$x_{\max} = \frac{x_1(\theta_0)^2}{x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right)}.$$

Since $\delta\theta_0 \ll \theta_0$, we can approximate

$$x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right) \approx -\frac{dx_1(\theta_0)}{d\theta_0}\delta\theta_0 = \frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)}\delta\theta_0.$$

Combining the last two equations and substituting the $x_1(\theta_0)$ expression gives

$$x_{\max} = \frac{Ab \cos^2(b\theta_0)}{\delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

B.3 (2.0 pt)

$$x_{\max} = \frac{Ab \cos^2(b\theta_0)}{\delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$



Planetary Physics (10 points)

General note: if student got the correct answer and the solution is physically and mathematically correct, all the points should be given.

Part A. Mid-ocean ridge (5.0 points)

A.1 (0.8 pt.)	Equating the two column pressures, $\rho gh = \rho_{oil}gh'$	0.2
	Subtracting the two opposing forces due to different fluids, $F_x = F_1 - F_0$	0.1
	Finding the two forces, $F_0 = \frac{\rho_0gh^2w}{2}$ and $F_1 = \frac{\rho_{oil}gh'^2w}{2}$ if only one out of two formulae is correct	0.3 0.2
	Final expression, $F_x = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{oil}} - 1\right) \frac{\rho_0gh^2w}{2}$	0.2
<hr/>		
A.2 (0.6 pt.)	Understanding that all three dimensions change according to the same law	0.1
Direct calculation	New volume, $V = V_1 \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)^3$ or $V \approx V_1 \left(1 - 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)$	0.1
	New density, $\rho(T) = \rho_1 \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)^{-3}$ or $\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)$	0.1
	Applying binomial/Taylor expansion at any stage of the solution	0.1
	Final answer $\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)$, $k = 3k_l$	0.2
	Using proportionality relations	$\rho \propto l^{-3}$
	$l^{-3} \propto \left(1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)^{-3} \approx \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)$	0.2
	Final answer $\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right)$, $k = 3k_l$	0.2



A.3 (1.1 pt.)	Equating the two column pressures, $p(0, h + D) - p(0, 0) = p(\infty, h + D) - p(\infty, 0)$	0.2
	Column pressure at $x = 0$, $\rho_1 g (h + D)$	0.1
	Column pressure far away, $p(\infty, h + D) - p(\infty, 0) = \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho(T(\infty, z)) g dz$	0.2
	Concluding that far away $\frac{dT}{dz} = \text{const.}$ if this is used but not explicitly stated – full marks	0.2
	Obtaining $T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D}$.	0.2
	Final answer, $D = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) h$	0.2
A.4 (1.6 pt.)	Writing the force as a difference between force at the centre of the ridge and that at infinity marks allotted as long as subtraction of forces or pressures at correct x values is written	0.5
	Correct pressure integration range $[z_1, z_2]$, where $z_1 \leq 0$ and $z_2 \geq h + D$	0.2
	Pressure at the ridge axis, $p(0, z) = p(0, 0) + \rho_1 g z$	0.1
	Pressure at infinity	0.4
	formula in the ocean, $p(\infty, 0) + \rho_0 g z$	0.1
	formula in the crust, $p(\infty, 0) + \rho_0 g h + \int_{z'=h}^z \rho_1 \left(1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z'-h}{D}}{T_1 - T_0}\right) g dz'$	0.3
	Final answer, $F \approx \frac{2g L h^2}{3k} (\rho_1 - \rho_0) \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)$	0.4
A.5 (0.9 pt.)	Stated variables on which the answer is going to depend: ρ_1, c, κ, D	0.2
	Correct dimensions of c , $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$	0.1
	Correct dimensions of κ , $MLT^{-3} \Theta^{-1}$ partial credit for writing down a correct law that can be used to find this, e.g. $\frac{dP}{dS} = \kappa \frac{dT}{dz}$, where P is the power conducted and S is the area of the surface across which the power is transferred	0.2
	Obtaining the simultaneous equations	0.2
	Final answer $\tau \approx \frac{c \rho_1 D^2}{\kappa}$ or $\tau = A \frac{c \rho_1 D^2}{\kappa}$	0.2

Part B. Seismic waves in a stratified medium (5.0 points)

B.1 (1.5 pt.)		
Method 1	Using the law of refraction in a stratified medium, $n(0) \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta$	0.5
	Definition of the refractive index, $n(z) \propto \frac{1}{v(z)}$	0.1
	Identifying that at $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = R - R \sin \theta_0$	0.3
	Finding $R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}$	0.3
	Final answer, $x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0$ $x_1(\theta_0) = -2z_0 \cot \theta_0$ is also correct if the alternative definition of θ_0 was used	0.3
Method 2	Using the law of refraction in a stratified medium, $n(0) \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta$	0.5
	Definition of the refractive index, $n(z) \propto \frac{1}{v(z)}$	0.1
	Obtaining the relation between dz and $d\theta$, $\frac{dz}{z_0} \sin \theta_0 = \cos \theta d\theta$	0.3
	Showing that ray path is an arc of a circle of radius $\frac{z_0}{\sin \theta_0}$ alternatively, obtaining the differential equation for $\frac{dx}{d\theta}$	0.3 0.3
	Final answer, $x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0$ $x_1(\theta_0) = -2z_0 \cot \theta_0$ is also correct if the alternative definition of θ_0 was used	0.3
	B.2 (1.5 pt.)	
B.2 (1.5 pt.)	Realizing that $\frac{E}{\pi}$ is the energy emitted per unit angle	0.4
	The idea to track an infinitesimal fraction of rays and relating an infinitesimal initial ray angle to the infinitesimal change in their destination, $d\theta_0 = \frac{d\theta_0}{dx} dx$	0.3
	Applying the result of B.1 to obtain $\frac{dx}{d\theta_0} = -b(A + x^2)$	0.3
	Final answer, $\varepsilon(x) = \frac{E}{\pi b(A^2 + x^2)} = \frac{E}{\pi(4z_0^2 + x^2)}$	0.1
	Plotting $\varepsilon(x)$	0.4
	maximum is at $x = 0$ and is of order $\frac{E}{A} \approx \frac{E}{z_0}$	0.1
	$\varepsilon(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$	0.1
$\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$ at $x = 0$	0.1	
no stationary points at $x \neq 0$	0.1	



B.3 (2.0 pt.)	The zone overlap condition, $N = \frac{x_1(\theta_0)}{x_- - x_+}$ considering the change in the zone width, $x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right)$	1.0 0.4
	Writing $x_- - x_+$ in terms of $\frac{dx_1}{d\theta_0}$	0.4
	Differentiating the result of B.1	0.2
	$x_{\max} = Nx_1(\theta_0)$	0.3
	Final answer, $x_{\max} = \frac{Ab \cos^2(b\theta_0)}{\delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}$.	0.1
