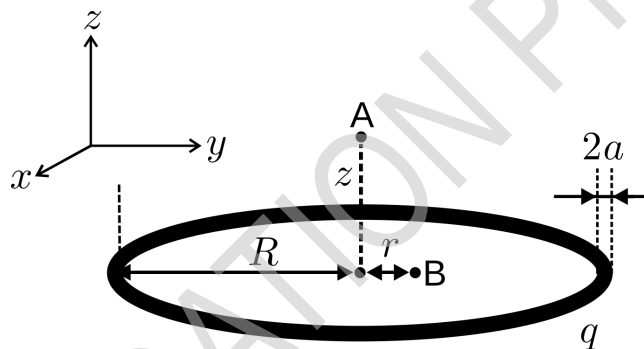




Ηλεκτροστατικός Φακός (10 Μονάδες)

Θεωρήστε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο μεταλλικό δακτύλιο ακτίνας R , το συνολικό φορτίο του οποίου είναι q . Ο δακτύλιος είναι ένα κοίλο τοροειδές (στη γεωμετρία, ο τόρος είναι ένα στερεό εκ περιστροφής που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου στον τρισδιάστατο χώρο γύρω από έναν άξονα ομοεπίπεδο με τον κύκλο. Συνήθως ο άξονας δεν τέμνει ούτε εφάπτεται με τον κύκλο, οπότε σε αυτή την περίπτωση η επιφάνεια έχει σχήμα δακτυλιοειδές και καλείται δακτυλιοειδές τοροειδές, ή απλά τοροειδές) πάχους $2a \ll R$. Αυτό το πάχος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο στα μέρη A, B, C και E. Το επίπεδο xy συμπίπτει με το επίπεδο του δακτυλίου, ενώ ο άξονας z είναι κάθετος σε αυτό, όπως φαίνεται στην Εικ. 1. Στα μέρη A και B μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τον τύπο (ανάπτυγμα Taylor):

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2, \text{ when } x \ll 1.$$



Εικόνα 1. Φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας R .

Μέρος A. Ηλεκτροστατικό δυναμικό στον άξονα του δακτυλίου (1 Μονάδα)

A.1	Να υπολογίσετε το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(z)$ κατά μήκος του άξονα του δακτυλίου και σε απόσταση z από το κέντρο του (σημείο A στην Εικ. 1).	0.3pt
A.2	Να υπολογίσετε το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(z)$ για την μικρότερη μη μηδενική δύναμη του z , θεωρώντας ότι ισχύει η προσέγγιση $z \ll R$.	0.4pt
A.3	Ένα ηλεκτρόνιο (με μάζα m και ηλεκτρικό φορτίο $-e$) τοποθετείται στο σημείο A (Εικ. 1, $z \ll R$). Ποια δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο; Μελετώντας την έκφραση της δύναμης, καθορίστε το πρόσημο του q , έτσι ώστε η κίνηση που προκύπτει να αντιστοιχεί σε ταλάντωση. Το κινούμενο ηλεκτρόνιο δεν επηρεάζει την κατανομή φορτίου στον δακτύλιο.	0.2pt
A.4	Ποια είναι η γωνιακή συχνότητα ω αυτής της αρμονικής ταλάντωσης;	0.1pt

Μέρος B. Ηλεκτροστατικό δυναμικό στο επίπεδο του δακτυλίου (1.7 Μονάδες)

Σε αυτό το μέρος του προβλήματος θα πρέπει να αναλύσετε το δυναμικό $\Phi(r)$ στο επίπεδο του δακτυ-



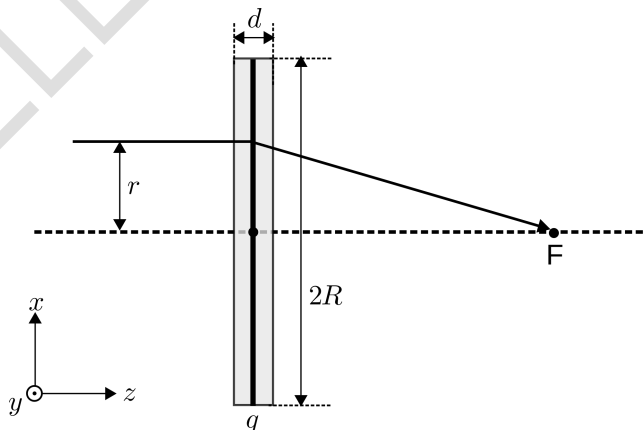
λίου ($z = 0$) θεωρώντας ότι ισχύει η προσέγγιση $r \ll R$ (σημείο Β στην Εικ. 1). Για την μικρότερη μη μηδενική δύναμη του r το ηλεκτροστατικό δυναμικό υπολογίζεται από την εξίσωση $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.

B.1 Να βρείτε μία έκφραση για την σταθερά β . Ίσως χρειαστεί ο τύπος του αναπτύγματος Taylor που σας δόθηκε. 1.5pt

B.2 Ένα ηλεκτρόνιο, βρίσκεται αρχικά στο σημείο Β (Εικ.1, $r \ll R$). Ποια είναι η δύναμη που ασκείται σε αυτό; Μελετώντας την έκφραση της δύναμης, καθορίστε το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου του δακτυλίου q έτσι ώστε η κίνηση που προκύπτει να αντιστοιχεί σε ταλάντωση. Το κινούμενο ηλεκτρόνιο δεν επηρεάζει την κατανομή φορτίου στον δακτύλιο. 0.2pt

Μέρος C. Η εστιακή απόσταση του εξιδανικευμένου ηλεκτροστατικού φακού: στιγμιαία φόρτιση (2.3 Μονάδες)

Έστω ότι σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε μια συσκευή για εστίαση ηλεκτρονίων - δηλαδή έναν ηλεκτροστατικό φακό. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη κατασκευή. Ο δακτύλιος τοποθετείται κάθετα στον άξονα z όπως φαίνεται στην Εικ. 2. Διαθέτουμε μια πηγή που εκπέμπει δέσμες ηλεκτρονίων σε μη σχετικιστικές ταχύτητες. Η κινητική ενέργεια αυτών των ηλεκτρονίων είναι $E = mv^2/2$ και ξεκινούν από την πηγή σε επακριβώς ελεγχόμενες χρονικές στιγμές. Το σύστημα προγραμματίζεται έτσι ώστε ο δακτύλιος να είναι ηλεκτρικά ουδέτερος τις περισσότερες φορές, αλλά το φορτίο του δακτυλίου γίνεται ίσο με q όταν τα ηλεκτρόνια πλησιάζουν σε απόσταση μικρότερη από $d/2$ ($d \ll R$) από το επίπεδο του δακτυλίου (η γραμμοσκιασμένη περιοχή στην Εικ. 2, η οποία ονομάζεται "ενεργή περιοχή"). Στο μέρος C θα υποθέσουμε ότι η φόρτιση και η αποφόρτιση είναι στιγμιαίες και ότι το ηλεκτρικό πεδίο εκτείνεται στον χώρο επίσης στιγμιαία. Ακόμη, θα θεωρήσουμε αμελητέα την επίδραση μαγνητικών πεδίων και θα υποθέσουμε ότι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στην διεύθυνση του qz είναι σταθερή. Τα κινούμενα ηλεκτρόνια δεν διαταράσσουν την κατανομή φορτίου στον δακτύλιο.



Εικόνα 2. Πρότυπο (μοντέλο) ενός ηλεκτροστατικού φακού.

- C.1** Να υπολογίσετε την εστιακή απόσταση f αυτού του φακού. Στους υπολογισμούς σας να θεωρήσετε ότι ισχύει η προσέγγιση $f \gg d$. Να εκφράσετε την απάντησή σας σε σχέση με την σταθερά β που βρήκατε στο υποερώτημα B.1 και άλλες γνωστές φυσικές ποσότητες. Να υποθέσετε ότι πριν την άφιξη της στην «ενεργή περιοχή», η δέσμη ηλεκτρονίων είναι παράλληλη με τον άξονα z και ότι ισχύει η προσέγγιση $r \ll R$. Το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου του δακτυλίου q πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε ο φακός να εστιάζει (να είναι συγκλίνων). 1.3pt

Στην πραγματικότητα η πηγή ηλεκτρονίων τοποθετείται στον άξονα z και σε απόσταση $b > f$ από το κέντρο του δακτυλίου. Θεωρήστε ότι τα ηλεκτρόνια δεν είναι πλέον παράλληλα με τον z -άξονα πριν φτάσουν στην «ενεργή περιοχή», αλλά εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή και σε ένα εύρος διαφορετικών γωνιών $\gamma \ll 1$ rad ως προς τον άξονα z . Τα ηλεκτρόνια θα εστιάζονται σε ένα σημείο που βρίσκεται σε απόσταση c από το κέντρο του δίσκου.

- C.2** Να υπολογίσετε το c . Εκφράστε την απάντησή σας ως προς τη σταθερά β που βρήκατε στο υποερώτημα B.1 και άλλες γνωστές φυσικές ποσότητες. 0.8pt

- C.3** Η εξίσωση ενός λεπτού οπτικού φακού 0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

ισχύει ακριβώς και για τον ηλεκτροστατικό φακό; Να το αποδείξετε υπολογίζοντας το άθροισμα των λόγων $1/b + 1/c$.

Μέρος D. Ο δακτύλιος ως πυκνωτής (3 Μονάδες)

Το πρότυπο (μοντέλο) του φακού που θεωρήθηκε μέχρι τώρα ήταν ιδανικό και υποθέσαμε ότι ο δακτύλιος φορτίζεται ακαριαία. Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει, καθώς ο δακτύλιος είναι πυκνωτής με πεπερασμένη χωρητικότητα C . Σε αυτό το μέρος θα αναλύσουμε τις ιδιότητες αυτού του πυκνωτή. Ίσως χρειαστείτε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

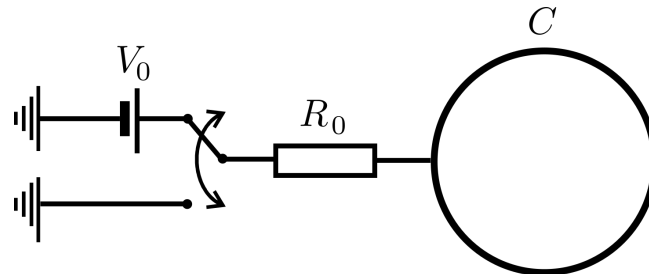
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

και

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

- D.1** Να υπολογίσετε την χωρητικότητα C του δακτυλίου. Να θεωρήσετε ότι ο δακτύλιος έχει ένα πεπερασμένο πλάτος $2a$ αλλά να θυμάστε ότι ισχύει η προσέγγιση: $a \ll R$. 2.0pt

Όταν τα ηλεκτρόνια φτάνουν στην «ενεργή περιοχή», ο δακτύλιος συνδέεται με μια πηγή σταθερής τάσης V_0 (Εικ.,3). Όταν τα ηλεκτρόνια περνούν την «ενεργή περιοχή», η πηγή τάσης αποσυνδέεται και ο δακτύλιος συνδέεται με τη γείωση. Η αντίσταση των επαφών είναι R_0 και η αντίσταση του ίδιου του δακτυλίου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.



Εικόνα 3. Η φόρτιση του Ηλεκτροστατικού φακού.

- D.2** Να προσδιορίσετε το φορτίο στον δακτύλιο ως συνάρτηση του χρόνου, $q(t)$, και να κατασκευάσετε μια σχηματική αναπαράσταση που να απεικονίζει αυτήν την εξάρτηση. Έστω ότι για $t = 0$ τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στο επίπεδο του δακτυλίου. Ποιο είναι το ηλεκτρικό φορτίο στον δακτύλιο q_0 όταν η απόλυτη τιμή του φορτίου $q(t)$ είναι μέγιστη; Η χωρητικότητα του δακτυλίου είναι C (δηλ., δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε την έκφραση που βρήκατε στο D.1). *Παρατήρηση:* Η πολικότητα που φαίνεται στην Εικ. 3 είναι ενδεικτική. Το πρόσημο πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε ο φακός να εστιάζει. 1.0pt

Μέρος Ε. Εστιακή απόσταση ενός πιο ρεαλιστικού φακού: μη στιγμιαία φόρτιση (2 Μονάδες)

Σε αυτό το μέρος του προβλήματος, θα εξετάσουμε τη λειτουργία αυτού του πιο ρεαλιστικού φακού. Και πάλι θα θεωρήσουμε αμελητέο το πλάτος του δακτυλίου $2a$ και θα υποθέσουμε ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται παράλληλα με τον άξονα z , πριν φτάσουν στην 'ενεργή περιοχή'. Ωστόσο, η φόρτιση του δακτυλίου δεν είναι πλέον στιγμιαία.

- E.1** Να υπολογίσετε την εστιακή απόσταση f του φακού. Να υποθέσετε ότι ισχύει $f/v \gg R_0 C$ και ότι τα d/v και $R_0 C$ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Να εκφράσετε την απάντησή σας σε σχέση με τη σταθερά β που βρήκατε στο μέρος Β και άλλων γνωστών φυσικών ποσοτήτων. 1.7pt
- E.2** Θα δείτε ότι το αποτέλεσμα για την εστιακή απόσταση f είναι παρόμοιο με αυτό που λαμβάνεται στο μέρος C, οπότε η τιμή του ηλεκτρικού φορτίου του δακτυλίου q αντικαθίσταται από την τιμή q_{eff} . Βρείτε την έκφραση του q_{eff} συναρτήσει ποσοτήτων της εκφώνησης. 0.3pt

**Ηλεκτροστατικός Φακός (10 μονάδες)****Μέρος Α. Ηλεκτροστατικό δυναμικό στον άξονα του δακτυλίου (1 μονάδα)****A.1** (0.3 pt)

$$\Phi(z) =$$

A.2 (0.4 pt)

$$\Phi(z) \approx$$

A.3 (0.2 pt)

$$F(z) =$$

Κυκλώστε την ορθή απάντηση: $q < 0$ or $q > 0$.**A.4** (0.1 pt)

$$\omega =$$

Μέρος Β. Ηλεκτροστατικό δυναμικό στο επίπεδο του δακτυλίου (1.7 μονάδες)**B.1** (1.5 pt)

$$\beta =$$

B.2 (0.2 pt)

$$F(r) =$$

Να κυκλώσετε την ορθή απάντηση: $q < 0$ or $q > 0$.**Μέρος C. Η εστιακή απόσταση του εξιδανικευμένου ηλεκτροστατικού φακού: στιγμιαία φόρτιση (2.3 μονάδες)****C.1** (1.3 pt)

$$f =$$



C.2 (0.8 pt)

$c =$

C.3 (0.2 pt)

Να κυκλώσετε την ορθή απάντηση. Η εξίσωση για τον λεπτό φακό είναι: valid or not valid.

Μέρος D. Ο δακτύλιος ως πυκνωτής (3 μονάδες)

D.1 (2.0 pt)

$C =$

DELEGATION PRINT

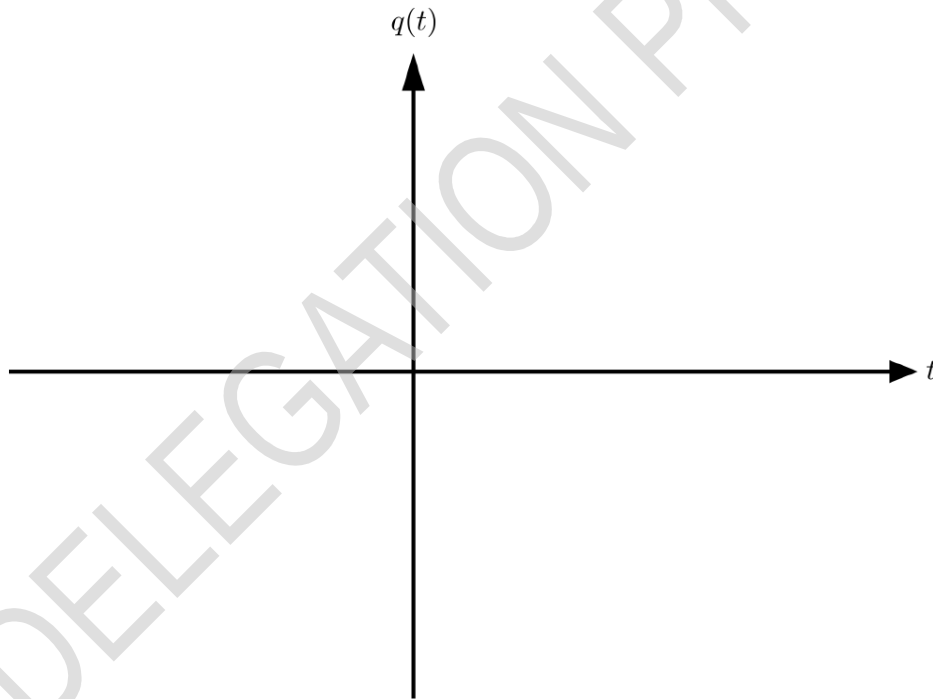
**D.2** (1.0 pt)

$$\text{Για } -\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}, \quad q(t) =$$

$$\text{Για } t > \frac{d}{2v}, \quad q(t) =$$

$$q_0 =$$

Το φορτίο στον δακτύλιο ως συνάρτηση του χρόνου:



Μέρος Ε. Εστιακή απόσταση ενός πιο ρεαλιστικού φακού: μη στιγμιαία φόρτιση (2 Μονάδες)

E.1 (1.7 pt)

$$f =$$

Theory



IPhO Lithuania
2021

A2-4

Greek (Greece)

E.2 (0.3 pt)

$q_{\text{eff}} =$

DELEGATION PRINT

Electrostatic lens (10 points)

Part A. Electrostatic potential on the axis of the ring (1 point)

A.1 (0.3 points)

The linear charge density of the ring is $\lambda = q/(2\pi R)$. All the points of the ring are situated a distance $\sqrt{R^2 + z^2}$ away from point A. Integrating over the whole ring we readily obtain:

$$\Phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

A.1 (0.3 pt)

$$\Phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

A.2 (0.4 points)

Using an expansion in powers of z we obtain:

$$\Phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right).$$

A.2 (0.4 pt)

$$\Phi(z) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right).$$

A.3 (0.2 points)

The potential energy of the electron is $V(z) = -e\Phi(z)$. The force acting on the electron is

$$F(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = +e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R^3} z.$$

If this is a restoring force, it should be negative for positive z . Thus, $q > 0$.

A.3 (0.2 pt)

$$F(z) = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R^3} z. \quad q > 0.$$



A.4 (0.1 points)

The equation of motion for an electron is

$$m\ddot{z} + \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R^3} z = 0$$

(here dots denote time derivatives). We therefore get

$$\omega = \sqrt{\frac{qe}{4\pi m\epsilon_0 R^3}}.$$

A.4 (0.1 pt)

$$\omega = \sqrt{\frac{qe}{4\pi m\epsilon_0 R^3}}.$$

Part B. Electrostatic potential in the plane of the ring (1.7 points)

B.1 (1.5 points)

There are two different ways to solve this problem: (i) using direct integration; (ii) using Gauss's law and the result of part A.

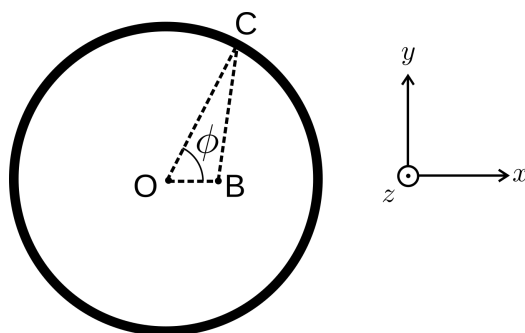


Figure 1: Calculating electrostatic potential in the plane of the ring through direct integration.

(i) **Direct integration.** We will follow the notations of Figure 1. Since the potential has cylindrical symmetry, let the point B, where we calculate the potential, be on the x -axis. Let

$$|OB| = r; |OC| = R.$$

Thus:

$$|BC|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi.$$



Electrostatic potential created by ring element $d\phi$ at the point B:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\phi}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \phi}}.$$

Using the expansion given in the formulation of the problem for $\epsilon = -1/2$ we have:

$$d\Phi \approx \frac{\lambda d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \phi \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \phi \right)^2 \right].$$

Ignoring the terms of the order r^3 and r^4 we get:

$$d\Phi \approx \frac{\lambda d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \frac{r}{R} \cos \phi + \frac{r^2}{R^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Integrating over all angles we finally obtain:

$$\Phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{r}{R} \cos \phi + \frac{r^2}{R^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \right] d\phi.$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

From here, comparing with the expression $\Phi(r) = q(\alpha + \beta r^2)$, we obtain

$$\beta = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(ii) Gauss's law.

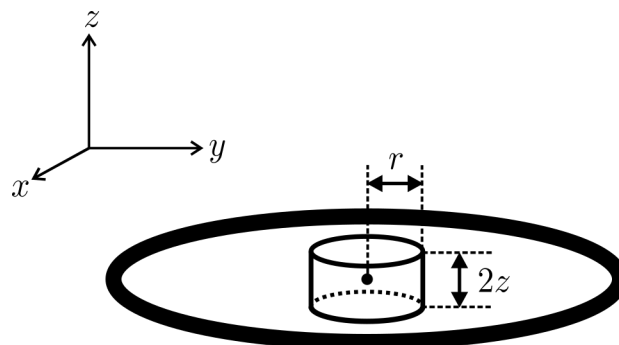


Figure 2: Calculating electrostatic potential in the plane of the ring via Gauss's law.

Let us analyze a small cylinder of radius r . The center of the cylinder coincides with the center of the ring. In part A we analyzed the potential along the z -axis, while in this part we analyze the potential along the radius r . For any $z \ll R$ and $r \ll R$ the potential has an expression:

$$\Phi(z, r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2} \right) + q\beta r^2.$$

The lowest order terms are quadratic in r and z . Due to reflection symmetry the potential does not contain terms of the type rz . This, for example, immediately gives us $\alpha = 1/(4\pi\epsilon_0 R)$. Thus, for small r and z electric fields in the radial and axial directions are:

$$\mathcal{E}_z(z, r) = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}z, \quad \mathcal{E}_r(z, r) = -2q\beta r.$$

Applying Gauss's law to the cylinder we obtain:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\text{side}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0.$$

The second integral is:

$$\int_{\text{base}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 \mathcal{E}_z(z, r) = \frac{qzr^2}{2\epsilon_0 R^3}.$$

The first integral is:

$$\int_{\text{side}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 4\pi r z \mathcal{E}_r(z, r) = -8\pi q \beta r^2 z.$$

Gauss's theorem thus gives:

$$\frac{qzr^2}{2\epsilon_0 R^3} - 8\pi q \beta r^2 z = 0.$$

This immediately yields

$$\beta = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3},$$

which agrees with the result obtained via direct integration.

B.1 (1.5 pt)

$$\beta = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$$

B.2 (0.2 points)

The potential of the electron is $V(r) = -e\Phi(r)$. Force acting on the electron in the xy plane is

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = +e\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{qe}{8\pi\epsilon_0 R^3}r.$$

To have oscillations we need the force to be negative for $r > 0$. Thus, $q < 0$.

B.2 (0.2 pt)

$$F(r) = +\frac{qe}{8\pi\epsilon_0 R^3}r. \quad q < 0.$$

**Part C. The focal length of the idealized electrostatic lens (2.3 points)****C.1 (1.3 points)**

Let us consider an electron with the velocity $v = \sqrt{2E/m}$ at a distance r from the “optical” axis (Figure 2 of the problem). The electron crosses the “active region” of the lens in time

$$t = \frac{d}{v}.$$

The equation of motion in the r direction:

$$m\ddot{r} = 2eq\beta r.$$

During the time the electron crosses the active region of the lens, the electron acquires radial velocity:

$$v_r = \frac{2eq\beta r}{m} \frac{d}{v} < 0.$$

The lens will be focusing if $q < 0$. The time it takes for an electron to reach the “optical” axis is:

$$t' = \frac{r}{|v_r|} = -\frac{mv}{2eq\beta d}.$$

During this time the electron travels in the z -direction a distance

$$\Delta z = t'v = -\frac{mv^2}{2eq\beta d} = -\frac{E}{eqd\beta}.$$

Δz does not depend on the radial distance r , therefore all electron will cross the “optical” axis (will be focused) in the same spot. Thus,

$$f = -\frac{E}{eqd\beta}.$$

C.1 (1.3 pt)

$$f = -\frac{E}{eqd\beta}.$$



C.2 (0.8 points)

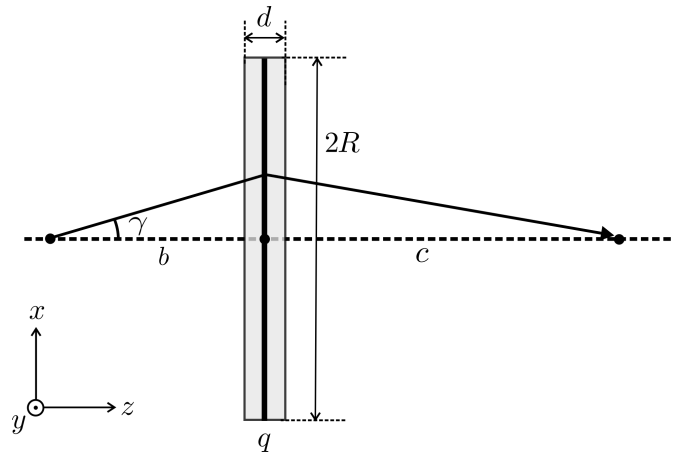


Figure 3: Focusing of electrons.

Let us consider an electron emitted at an angle γ to the optical axis (Figure 3). Its initial velocity in the radial direction is:

$$v_{r;0} = v \sin \gamma \approx v \gamma \approx v \frac{r}{b},$$

where r is the radial distance of the electron when it reaches the plane of the ring. The velocity in the z -direction is

$$v_z = v \cos \gamma \approx v.$$

For small angles γ the additional velocity in the r -direction acquired in the “active region” is the same as in part C.1. Thus, the radial velocity after crossing the active region is

$$v_r = v \frac{r}{b} + \frac{2eq\beta r d}{m v},$$

where the first term is positive and the second term is negative, since $q < 0$. If the electrons are focused, then $v_r < 0$ (this can be verified after obtaining the final result). The electron will reach the optical axis in time

$$t' = \frac{r}{|v_r|} = -\frac{r}{\frac{2eq\beta r d}{m v} + v \frac{r}{b}} = -\frac{1}{\frac{2eq\beta d}{m v} + \frac{1}{b}}.$$

During this time it will travel a distance

$$c = t'v = -\frac{1}{\frac{2eq\beta d}{m v^2} + \frac{1}{b}} = -\frac{1}{\frac{eq\beta d}{E} + \frac{1}{b}}.$$

C.2 (0.8 pt)

$$c = -\frac{1}{\frac{eq\beta d}{E} + \frac{1}{b}}.$$



C.3 (0.2 pt)

From the previous answer we obtain:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{eq\beta d}{E}.$$

Comparing with the answer of C.1 we immediately obtain

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f},$$

i.e. the equation of a thin optical lens is valid for an electrostatic lens as well.

C.3 (0.2 pt)

The equation of a thin optical lens $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ is **valid** for an electrostatic lens.

Part D. The ring as a capacitor (3 points)

D.1 (2.0 points)

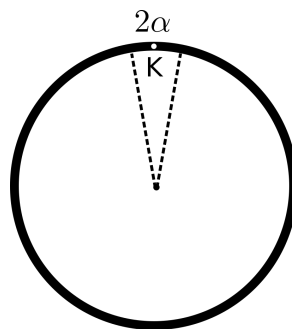


Figure 4: Calculation of the capacitance of the ring.

Let us sub-divide the entire ring into two parts: a part corresponding to the angle $2\alpha \ll 1$, and the rest of the ring, as shown in Figure 4. While the angle is small in comparison to 1, let us assume that the length of the first part, αR , is still large compared to a ($\alpha R \gg a$). Let us calculate the electrostatic potential Φ at point K. It is a sum of two terms: the first one produced by the cut-out part with an angle 2α (contribution Φ_1) and the second one originating from the rest of the ring (contribution Φ_2).

Contribution Φ_1 . Since $\alpha \ll 1$, we can neglect the curvature of the cylinder that is cut out from the ring. The linear charge density on the ring is $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$. The potential at the center of the

cylinder is then given by an integral:

$$\Phi_1 = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{\alpha R} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \int_0^{\alpha R} \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \int_0^{\alpha R/a} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Using the integral provided in the description of the problem we get:

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \Big|_0^{\alpha R/a} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln \left(\frac{\alpha R}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha R}{a} \right)^2} \right).$$

As $\alpha R \gg a$,

$$\Phi_1 \approx \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln \left(\frac{2\alpha R}{a} \right).$$

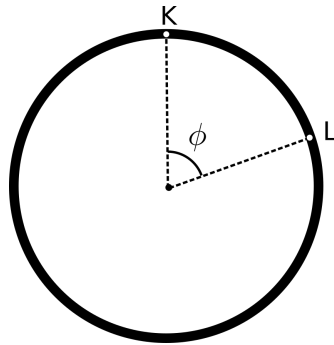


Figure 5: Calculation of the capacitance of the ring

Contribution Φ_2 . In this case we can neglect the thickness a . Using the cosine theorem we can derive the distance between points K and L of Figure 5:

$$|KL| = 2R \sin \frac{\phi}{2}.$$

The contribution Φ_2 can then be written as an integral:

$$\Phi_2 = 2 \frac{q}{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\phi}{2R \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 R} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\phi}{\sin \frac{\phi}{2}} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sin \frac{\phi}{2}} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \int_{\alpha/2}^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Using the integral from the formulation of the problem, we calculate:

$$\int_{\alpha/2}^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sin \chi} = - \ln \left(\frac{\cos \chi + 1}{\sin \chi} \right) \Big|_{\alpha/2}^{\pi/2} = \ln \left(\frac{\cos \alpha/2 + 1}{\sin \alpha/2} \right) \approx \ln \left(\frac{4}{\alpha} \right)$$

for $\alpha \ll 1$. Therefore

$$\Phi_2 \approx \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln \left(\frac{4}{\alpha} \right).$$

The total potential and capacitance. The total potential is the sum of Φ_1 and Φ_2 :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(\frac{2\alpha R}{a}\right) + \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(\frac{4}{\alpha}\right) = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(\frac{8R}{a}\right).$$

α drops out from the expression. From here we obtain the capacitance $C = q/\Phi$:

$$C = \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln\left(\frac{8R}{a}\right)}.$$

$C \rightarrow 0$ as $a \rightarrow 0$.

D.1 (2.0 pt)

$$C = \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln\left(\frac{8R}{a}\right)}.$$

D.2 (1.0 point)

Let $q(t)$ be the charge on the ring at a time t . Potential of the disk is thus $q(t)/C$. Voltage drop of the resistor is $R_0 I(t) = R_0 dq/dt$. Therefore for time $-\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}$:

$$\frac{q(t)}{C} + R_0 \frac{dq}{dt} = V_0.$$

Integrating this equation and keeping in mind that $q(t) = 0$ at $t = -d/(2v)$, we get:

$$q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} e^{-\frac{t}{R_0C}}\right).$$

The charge attains the largest absolute value at $t = d/(2v)$. The value of the charge at this time is:

$$q_0 = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{vR_0C}}\right).$$

When $t > \frac{d}{2v}$, we get:

$$\frac{q(t)}{C} + R_0 \frac{dq}{dt} = 0.$$

From here:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{R_0C} + \frac{d}{2vR_0C}} = CV_0 \left(e^{\frac{d}{2vR_0C}} - e^{-\frac{d}{2vR_0C}}\right) e^{-\frac{t}{R_0C}}.$$

Therefore, we obtain:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < -\frac{d}{2v}; \\ CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} e^{-\frac{t}{R_0C}}\right) & \text{for } -\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}; \\ CV_0 \left(e^{\frac{d}{2vR_0C}} - e^{-\frac{d}{2vR_0C}}\right) e^{-\frac{t}{R_0C}} & \text{for } t > \frac{d}{2v}. \end{cases}$$

For a lens to be focusing we require that charge is negative, therefore $V_0 < 0$. The dependence of charge on time is shown in Figure 6.

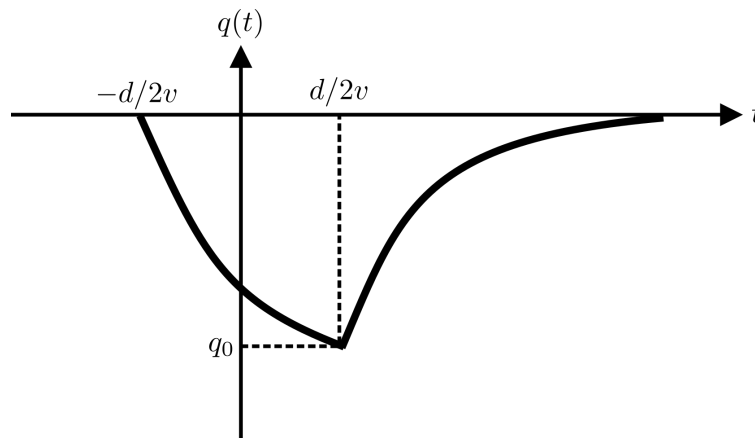


Figure 6: Charge on the ring as a function of time.

D.2 (1.0 pt)

$$\text{For } -\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}, \quad q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} e^{-\frac{t}{R_0C}} \right).$$

$$\text{For } t > \frac{d}{2v}, \quad q(t) = CV_0 \left(e^{\frac{d}{2vR_0C}} - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} \right) e^{-\frac{t}{R_0C}}.$$

$$q_0 = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{vR_0C}} \right). \quad \text{Schematic plot of this function is shown in Figure 6.}$$

Part E. Focal length of a more realistic lens (2 points)

E.1 (1.7 points)

Like in part C, the radial equation of motion of an electron is:

$$m\ddot{r} = 2eq(t)\beta r,$$

where in this case $q(t)$ depends on time. Using the notation $\eta = 2e\beta/m$, we obtain:

$$\ddot{r} - \eta q(t)r = 0.$$

As $f/v \gg R_0C$, then during charging–decharging the electron does not substantially change its radial position r , and we can assume r to be constant during the entire charging–decharging process. In this case the acquired vertical velocity is

$$v_r = \eta r \int_{-d/(2v)}^{\infty} q(t) dt.$$

We can use the derived equations for $q(t)$ and find the integrals. The integral $\int_{-d/(2v)}^{d/(2v)} q(t) dt$ is (using the notation $d/v = t_0$, $R_0C = \tau$, $CV_0 = Q_0$):

$$\int_{-t_0/2}^{t_0/2} q(t) dt = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t_0}{2\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt = Q_0 \left(t_0 - \tau \left[1 - e^{-t_0/\tau} \right] \right).$$

The integral $\int_{d/(2v)}^{\infty} q(t) dt$ is

$$\int_{t_0/2}^{\infty} Q_0 \left(e^{\frac{t_0}{2\tau}} - e^{-\frac{t_0}{2\tau}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} dt = Q_0 \tau \left[1 - e^{-t_0/\tau} \right].$$

Adding the two integrals we obtain for the final integral:

$$\int_{-t_0/2}^{\infty} q(t) dt = Q_0 t_0.$$

Interestingly, it does not depend on $\tau = R_0C$. Therefore, the acquired vertical velocity of the electron is

$$v_r = \eta r \frac{CV_0 d}{v} = \frac{2e\beta CV_0 d r}{mv}.$$

Following the logic similar to part C, we derive the focal length

$$f = -\frac{E}{eCV_0 d \beta}.$$

E.1 (1.7 pt)

$$f = -\frac{E}{eCV_0 d \beta}.$$

E.2 (0.3 points).

Comparing $f = -E/(eCV_0 d \beta)$ with $f = -E/(eqd\beta)$ from part C we immediately obtain $q_{\text{eff}} = CV_0$.

E.2 (0.3 pt)

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

Electrostatic lens (10 points)

General note: if student got the correct answer and the solution is physically and mathematically correct, all the points should be given.

Part A. Electrostatic potential on the axis of the ring (1 point)

A.1 (0.3 pt)	Potential created by a small element of the ring	0.1
	Correct answer	0.2
A.2 (0.4 pt)	Writing the equation in the form that contains a small parameter (z/R)	0.2
	Correct answer	0.2
A.3 (0.2 pt)	Writing the expression for the force	0.1
	Correct sign for q	0.1
A.4 (0.1 pt)	Correct answer	0.1

Part B. Electrostatic potential in the plane of the ring (1.7 points)

B.1 (1.5 pt) via direct integration	Potential created by a small element $d\varphi$	0.3
	Correct expansion in (r/R)	0.3
	Correct integration	0.6
	Final value for β	0.3
via Gauss's law	The expression of the potential	0.2
	The application of Gauss' law to a cylinder	0.4
	Integral through the side	0.3
	Integral through the base	0.3
	Final value of β	0.3
B.2 (0.2 pt)	Writing the expression for the force	0.1
	Correct sign for q	0.1

Part C. The focal length of the idealized model of an electrostatic lens (2.3 points)

C.1 (1.3 pt)	Writing the equation of motion for r	0.2
	Time of the electron in the “active region”	0.1
	Radial velocity v_r	0.3
	Time to reach the optical axis	0.2
	Focal length f	0.5
C.2 (0.8 pt)	Initial velocity v_r	0.1
	Initial velocity v_z	0.1
	Radial velocity after traversing the “active region”	0.2
	Time to reach the optical axis	0.2
	Expression for c	0.2
C.3 (0.2 pt)	showing that $1/b + 1/c = 1/f$ is valid	0.2

Part C.1 and especially C.2 can be alternatively solved using geometrical considerations (i.e., angles and angles of deflection) rather the “kinematic” arguments presented in the official solution. If the final answer is correct, all points should be given. If the final answer is not correct, but students take an alternative approach, they should be given some points similarly to the table above. For example, calculating the radial velocity after traversing the “active region” is equivalent to find the angle of deflection after traversing the “active” region, so 0.2 points should be give.

Part D. The ring as a capacitor (3 points)

D.1 (2.0 pt)	The idea to separate the ring into two parts	0.4
	Writing the expression for Φ_1	0.2
	Correct value of Φ_1	0.3
	Writing the expression for Φ_2	0.2
	Correct value of Φ_2	0.3
	Correct value of the total potential Φ	0.4
	Correct expression for C	0.2

The marking scheme above pertains to the exact solution. However some students might solve the problem approximately using some quantitative arguments. In this “approximate” solution the students might obtain a capacitance of the form $\frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln\left(\frac{AR}{a}\right)}$, where A is a constant different from 8. If students obtain such an answer, they should be given 1 point.



D.2 (1.0 pt)	Diff. equation for $-d/2v < t < d/2v$	0.1
	Correct answer for $-d/2v < t < d/2v$	0.2
	Correct expression for q_0	0.2
	Diff. equation for $t > d/2v$	0.1
	Correct answer for $t > d/2v$	0.2
	Accurate sketch (0.05 pt per each):	0.2
	charge is negative	
	correct dependence for $t < d/(2v)$	
	correct dependence for $t > d/(2v)$	
	additional labels on the axes ($q_0, \pm d/(2v)$)	

Part E. Focal length of a more realistic lens (2.0 points)

E.1 (1.7 pt)	Equation of motion for r	0.2
	Writing v_r as an integral	0.4
	Correct integral from $-d/(2v)$ to $d/(2v)$	0.2
	Correct integral from $d/(2v)$ to ∞	0.2
	Correct expression for v_r	0.2
	Correct focal length	0.5

E.2 (0.3 pt)	Correct answer for q_{eff}	0.3
--------------	-------------------------------------	-----
