



Σωματίδια και Κύματα (10 μονάδες)

Ο δεισμός κύματος-σωματιδίου, που αναφέρεται στην δυνατότητα να περιγράψουμε ένα σωματίδιο ως κύμα και αντιστρόφως, είναι μία από τις βασικές έννοιες της Κβαντικής Μηχανικής. Στο πρόβλημα αυτό θα βασιστούμε σε αυτή την ιδέα και μερικές ακόμη βασικές υποθέσεις για να διερευνήσουμε μερικά κβαντικά φαινόμενα, καλύπτοντας τους δύο διακριτούς τύπους σωματιδίων του μικρόκοσμου — τα φερμιόνια και τα μποζόνια.

Μέρος Α. Κβαντικό σωματίδιο σε κουτί (1.4 μονάδες)

Θεωρήστε την ελεύθερη κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m σε ένα μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού, όπου η δυναμική ενέργεια $V(x)$ δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Ενώ ένα κλασικό σωματίδιο μπορεί να κινείται σε τέτοιο δυναμικό έχοντας οποιαδήποτε κινητική ενέργεια, για τα κβαντικά σωματίδια επιτρέπονται μόνο συγκεκριμένες, διακριτές μεταξύ τους, θετικές ενεργειακές καταστάσεις (στάθμες). Σε οποιαδήποτε τέτοια επιτρεπτή κατάσταση, το σωματίδιο περιγράφεται ως ένα στάσιμο κύμα de Broglie με δεσμούς στα τοιχώματα του πηγαδιού.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Να υπολογίσετε την ελάχιστη δυνατή ενέργεια $E_{\min}$ ενός κβαντικού σωματιδίου. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των ποσοτήτων m , L , και της σταθεράς του Planck h . | 0.4pt |
|------------|--|-------|

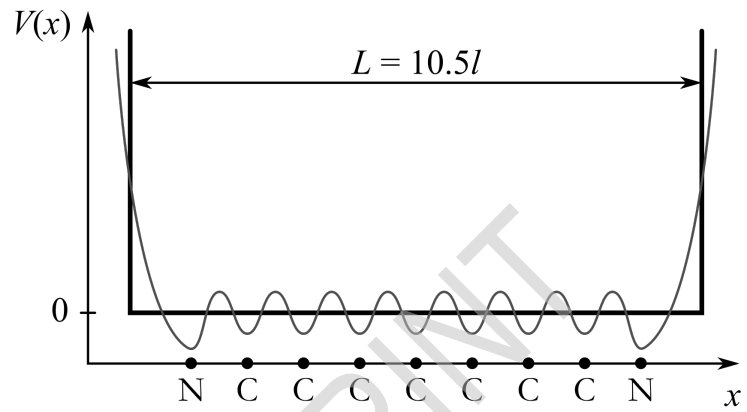
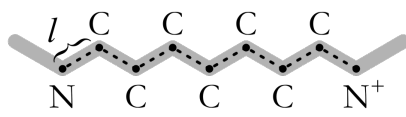
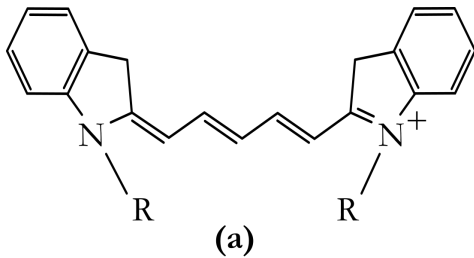
Όταν ένα σωματίδιο έχει την ελάχιστη ενέργεια, λέμε ότι βρίσκεται σε θεμελιώδη κατάσταση. Οι υπόλοιπες επιτρεπτές καταστάσεις ονομάζονται διεγερμένες. Θα συμβολίσουμε τις διάφορες καταστάσεις (ταξινομημένες κατά σειρά αύξουσας ενέργειας) ως E_n , ξεκινώντας από το σύμβολο E_1 για την θεμελιώδη κατάσταση.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.2 | Να βρείτε μια γενική έκφραση για την ενέργεια E_n (όπου $n = 1, 2, 3, \dots$). | 0.6pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.3 | (θεωρούμε ότι) Ένα σωματίδιο μεταβαίνει ακαριαία από μία κατάσταση σε άλλη μόνο με την εκπομπή ή απορρόφηση ενός φωτονίου με ενέργεια ίση με την ενεργειακή διαφορά των δύο καταστάσεων. Να βρείτε το μήκος κύματος λ_{21} του φωτονίου που εκπέμπεται κατά την μετάβαση σωματιδίου από την πρώτη διεγερμένη κατάσταση (E_2) στην θεμελιώδη (E_1). | 0.4pt |
|------------|--|-------|

Μέρος Β. Οπτικές ιδιότητες των μορίων (2.1 μονάδες)

Σε αυτό το μέρος θα μελετήσουμε διάφορες οπτικές ιδιότητες του μορίου της κυανίνης Cy5 — ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μόριο βαφής, που απεικονίζεται στην Εικ. 1a. Οι οπτικές του ιδιότητες καθορίζονται κατά βάση από την ανθρακική αλυσίδα, αποτελούμενη από εναλλασσόμενους απλούς και διπλούς δεσμούς μεταξύ των ατόμων άνθρακα, που απεικονίζονται στην Εικ. 1b, ενώ η επίδραση των δακτυλίων στα όρια του μορίου και των ριζών R είναι κατά πολύ μικρότερη. Τρία από τα τέσσερα ηλεκτρόνια σθένους κάθε ατόμου C (και των ατόμων αζώτου N) στην ανθρακική αλυσίδα σχηματίζουν τους δεσμούς, ενώ τα εναπομείναντα ηλεκτρόνια σθένους ανήκουν “από κοινού” σε όλα τα άτομα και μπορούν να κινούνται κατά μήκος της ανθρακικής αλυσίδας. Η καθαρή δυναμική ενέργεια κάθε τέτοιου ηλεκτρονίου απεικονίζεται με την λεπτή ημιτονοειδή κυμαινόμενη γραμμή της Εικ. 1c, με ελάχιστα που αντιστοιχούν στις θέσεις των ατόμων C και N.



Εικόνα 1. (a) Χημική δομή του μορίου της κυανίνης Cy5 (για απλότητα, τα άτομα υδρογόνου δεν απεικονίζονται, ενώ με το σύμβολο R υποδηλώνονται κάποιες χημικές ρίζες). (b) Η ανθρακική αλυσίδα του μορίου Cy5, με μέση απόσταση μεταξύ ατόμων l . (c) Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου κατά μήκος της ανθρακικής αλυσίδας (λεπτή γραμμή) και η προσέγγισή της από βηματική συνάρτηση που δίνεται από την εξ. 1 (έντονη γραμμή).

Για απλότητα, θα προσεγγίσουμε αυτή την μορφή δυναμικής ενέργειας από μια απλή συνάρτηση που δίνεται στην Εξ. 1 με πλάτος $L = 10.5l$ (βλ. έντονη γραμμή στην Εικ. 1c), όπου $l = 140$ pm είναι η μέση απόσταση μεταξύ ατόμων (βλ. επίσης Εικ. 1b). Ως αποτέλεσμα, λαμβάνουμε το “αέριο ηλεκτρονίων” αποτελούμενο από 10 ηλεκτρόνια (7 από κάθε άτομο C, 2 από το άτομο N, και 1 από το ιόν N^+), που κινείται ελεύθερα στο μονοδιάστατο κουτί και μελετήθηκε επαρκώς στο μέρος Α. Στους υπολογισμούς μας, μπορούμε να παραβλέψουμε την αλληλεπίδραση αυτών των ηλεκτρονίων, όμως θα πρέπει να συνυπολογίσουμε το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια, συνεπώς υπακούουν στην Απαγορευτική Αρχή του Pauli. Παραβλέπουμε επίσης την επίδραση άλλων ηλεκτρονίων καθώς και την κίνηση των πυρήνων.

B.1 Να υπολογίσετε το μεγαλύτερο μήκος κύματος λ του φωτονίου που μπορεί να απορροφηθεί από το μόριο Cy5, υποθέτοντας ότι το σύστημα ηλεκτρονίων βρίσκεται αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει του l , κατάλληλων φυσικών σταθερών και των απαραίτητων αριθμητικών συντελεστών και να υπολογίσετε την αντίστοιχη αριθμητική τιμή. 0.8pt

B.2 Ένα άλλο μόριο βαφής, το Cy3, έχει παρόμοια δομή, αλλά η αλυσίδα είναι βραχύτερη κατά δύο άτομα άνθρακα. Το φάσμα απορρόφησής του μετατοπίζεται προς το ιώδες ή το ερυθρό άκρο του ορατού φάσματος, σε σύγκριση με το μόριο Cy5; Να υπολογίσετε την τιμή του $\Delta\lambda$ για αυτή την φασματική μετατόπιση. Μπορείτε να υποθέσετε ότι η απομάκρυνση δύο ατόμων άνθρακα δεν αλλάζει το σχήμα του μορίου και απλώς καθιστά την αλυσίδα βραχύτερη κατά δύο μονάδες απόστασης μεταξύ διαδοχικών ατόμων. 0.4pt

Στην διεγερμένη κατάσταση, ένα μόριο μπορεί να μεταβεί στιγμιαία στην θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας φωτόνιο. Ο μέσος ρυθμός K τέτοιων συμβάντων (δηλ. η σχετική μείωση dN/N του πλήθους των μορίων που βρίσκονται σε διεγερμένη κατάσταση σε χρονικό διάστημα dt , δίνεται από την $K = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) καθορίζεται από το μήκος κύματος λ του εκπεμπόμενου φωτονίου, την ηλεκτρική ροπή d μετάβασης του διπόλου (που είναι της τάξης μεγέθους $d \simeq el$, με e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο)

καθώς και την διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0 και την σταθερά του Planck h .

- B.3** Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση, να βρείτε μια έκφραση για τον ρυθμό αυθόρμητης ακτινοβολίας συναρτήσει των ε_0 , h , λ , και d . Ο αριθμητικός συντελεστής για την έκφραση αυτή δίνεται $k = \frac{16}{3}\pi^3$. 0.7pt

- B.4** Για το μόριο Cy5, $d \approx 2.4 \text{ el}$. Να υπολογίσετε την μέση χρονική διάρκεια τ_{Cy5} φθορισμού (φωτισμού) της μικρότερης διεγερμένης κατάστασης του μορίου Cy5, που είναι αντίστροφη του ρυθμού εκπομπής κατά την μετάβαση στην θεμελιώδη στάθμη. 0.2pt

Μέρος C. Συμπύκνωση Bose-Einstein (1.5 μονάδες)

Το μέρος αυτό δεν σχετίζεται άμεσα με τα μέρη A και B. Εδώ θα μελετήσουμε την συλλογική συμπεριφορά μποζονίων. Τα μποζόνια δεν υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli και — σε χαμηλές θερμοκρασίες ή υψηλές πυκνότητες — παρατηρείται ένα φαινόμενο που ονομάζεται Συμπύκνωση Bose-Einstein (Bose-Einstein condensation, BEC). Αυτή είναι μια αλλαγή φάσης σε μια ενδιαφέρουσα συλλογική κβαντική κατάσταση: ένα μεγάλο πλήθος πανομοιότυπων σωματιδίων "συμπυκνώνονται" σε μία μοναδική κβαντική κατάσταση και αρχίζουν να συμπεριφέρονται ως ένα κύμα. Τυπικά, η μετάβαση πραγματοποιείται με την ψύξη ενός συγκεκριμένου πλήθους σωματιδίων κάτω από μία κρίσιμη θερμοκρασία. Θεωρητικά το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επιτευχθεί διατηρώντας σταθερή την θερμοκρασία και μεταβάλλοντας την πυκνότητα πέρα από μία κρίσιμη τιμή.

Θα ξεκινήσουμε διερευνώντας την σχέση μεταξύ θερμοκρασίας και πυκνότητας των σωματιδίων κατά την μετάβαση. Όπως προκύπτει, μια εκτίμηση των κρίσιμων τιμών μπορεί να εξαχθεί από μία απλή παρατήρηση: *Η BEC συμβαίνει όταν το μήκος κύματος de Broglie που αντιστοιχεί στην ενεργό ταχύτητα των σωματιδίων είναι ίσο με την χαρακτηριστική απόσταση ανάμεσα στα άτομα ενός αερίου.*

- C.1** Για ένα αέριο μη αλληλεπιδρόντων μορίων ^{87}Rb σε θερμική ισορροπία, να γράψετε τις εκφράσεις της τυπικής ορμής τους p και του τυπικού μήκους κύματος de Broglie λ_{dB} ως συναρτήσεις της ατομικής μάζας m , της θερμοκρασίας T και κατάλληλων φυσικών σταθερών. 0.4pt

- C.2** Να υπολογίσετε την τυπική απόσταση ℓ μεταξύ σωματιδίων ενός αερίου, συναρτήσει της πυκνότητας σωματιδίων n . Από αυτή να βρείτε την κρίσιμη θερμοκρασία T_c συναρτήσει της ατομικής μάζας, της πυκνότητας και κατάλληλων φυσικών σταθερών. 0.5pt

Για την εργαστηριακή πραγματοποίηση της BEC, οι πειραματιστές πρέπει να ψύξουν αέρια σε ιδιαίτερα χαμηλές θερμοκρασίες $T_c = 100 \text{ nK}$.

- C.3** Ποια είναι η πυκνότητα n_c του αερίου Rb, αν η μετάβαση συμβαίνει σε τέτοια θερμοκρασία; Για λόγους σύγκρισης, να υπολογίσετε επίσης την "συνήθη" πυκνότητα n_0 ενός ιδανικού αερίου σε Κανονικές Συνθήκες, δηλ. $T_0 = 300 \text{ K}$ και $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η "συνήθης" πυκνότητα; Να υποθέσετε ότι η μάζα των ατόμων είναι 87πλάσια της Ατομικής Μονάδας Μάζας (m_{amu}). 0.6pt

Μέρος D. Οπτικά πλέγματα τριών ακτίνων (5 μονάδες)

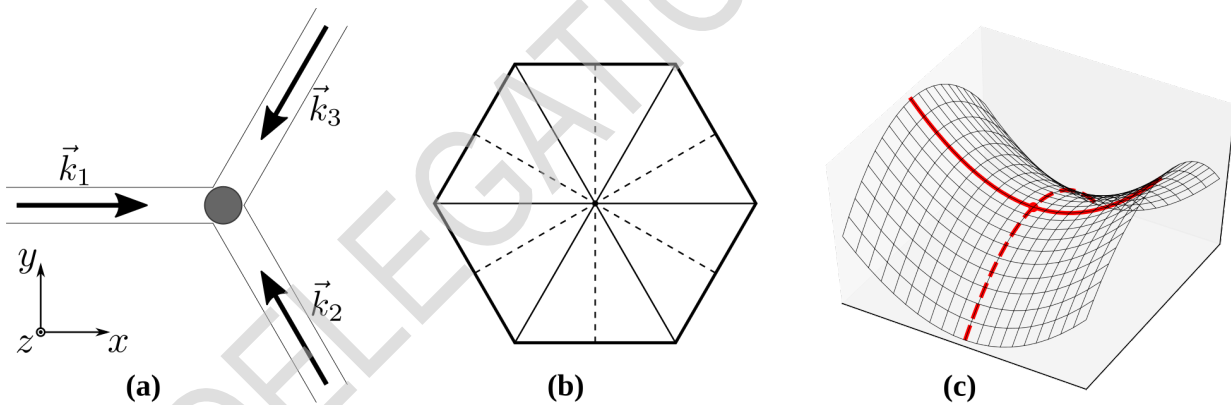
Οι πρώτες BEC πραγματοποιήθηκαν το 1995 και από τότε η πειραματική εργασία διακλαδίστηκε προς διάφορες κατευθύνσεις. Σε αυτό το μέρος θα διερευνήσετε μια ιδιαίτερα καρποφόρα ιδέα: την τοποθέτηση του συμπυκνώματος σε δυναμικά χωρικής περιοδικότητας, τα οποία παράγονται από την συμβολή συνεκτικών ακτίνων laser. Λόγω της περιοδικής μορφής τους, οι προκύπτουσες εικόνες συμβολής ονομάζονται *οπτικά πλέγματα*. Η δυναμική ενέργεια $V(\vec{r})$ ενός ατόμου που κινείται σε οπτικό πλέγμα είναι ανάλογη της τοπικής έντασης του φωτός, γεγονός που μπορείτε να υποθέσετε ότι ισχύει για τους υπολογισμούς σας.

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle. \quad (2)$$

όπου α είναι μια θετική σταθερά. Τα σύμβολα $\langle$ και $\rangle$ υποδηλώνουν μέση τιμή ως προς τον χρόνο, η οποία εξαλείφει την συνεισφορά των γοργά μεταβαλλόμενων όρων. Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από το i -στο laser δίνεται από

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\epsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

όπου $E_{0,i}$ είναι το πλάτος, $\vec{k}_i$ το κυματόνυσμα και $\vec{\epsilon}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης.



Εικόνα 2. (a) Οπτικό πλέγμα τριών ακτίνων: τρία επίπεδα κύματα με κυματόνυμα $\vec{k}_{1,2,3}$ συμβάλουν στην περιοχή που οριοθετείται από τον γκρίζο κύκλο. (b) Άξονες συμμετρίας ενός κανονικού εξαγώνου: οι συμπαγείς και οι σπικτές γραμμές δείχνουν δύο σύνολα αξόνων συμμετρίας. (c) Σαγματικό σημείο (=σημείο πάνω στην επιφάνεια σέλας): είναι το σημείο μιας επιφάνειας όπου οι κλίσεις σε αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις είναι μηδέν, ενώ το σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης. Κατά μήκος της συμπαγούς τροχιάς φαίνεται ότι συναντάμε ένα ελάχιστο. Απαιτείται πρόσθετη ανάλυση σε τροχιά κάθετη στην πρώτη (διακεκομμένη γραμμή) για να διακριθεί ένα πραγματικό ελάχιστο από το σαγματικό σημείο που εικονίζεται.

Σκοπός σας είναι να μελετήσετε *τριγωνικά οπτικά πλέγματα που παράγονται από την συμβολή τριών συνεκτικών ακτίνων laser κοινής έντασης*. Μια τυπική διάταξη φαίνεται στην Εικ. 2α. Εδώ και οι τρεις ακτίνες είναι πολωμένες κατά τον άξονα z , διαδίδονται στο επίπεδο xy και τέμνονται υπό ίσες γωνίες 120° . Να επιλέξετε την κατεύθυνση του άξονα x παράλληλη προς το κυματόνυμα $\vec{k}_1$.



D.1 Χρησιμοποιώντας τις Εξ. 2 και 3 να βρείτε μια έκφραση της δυναμικής ενέργειας $V(\vec{r})$ ως συνάρτησης του $\vec{r} = (x, y)$ στο επίπεδο των ακτίνων. 1.4pt

Υπόδειξη: το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί κομψά υπό την μορφή ενός σταθερού όρου και του αθροίσματος τριών συνημιτονοειδών συναρτήσεων με ορίσματα $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Παρακαλούμε να γράψετε το αποτέλεσμα στην μορφή αυτή και να ταυτοποιήσετε τα διανύσματα $\vec{b}_i$.

D.2 Η προκύπτουσα δυναμική ενέργεια έχει έναν εξαπλό άξονα συμμετρίας εκ περιστροφής, δηλ., η κατανομή δυναμικού δεν αλλάζει με την περιστροφή κατά γωνία που είναι πολλαπλάσια των 60° γύρω από την αρχή του συστήματος αναφοράς. Να διατυπώσετε ένα απλό επιχείρημα για να αποδείξετε ότι αυτό ισχύει. 0.5pt

Η προηγούμενη παρατήρηση περί συμμετρίας, απλοποιεί την ανάλυση των δισδιάστατων κατανομών δυναμικού $V(\vec{r})$. Όπως φαίνεται στην Εικ. 2b, ένα κανονικό εξαγωνό έχει άξονες συμμετρίας που συνδέουν αντίθετες κορυφές (συμπαγείς γραμμές) και τα μέσα σημεία αντίθετων πλευρών (στικτές γραμμές). Στην περίπτωση μας λοιπόν δεν απαιτούνται η παραγωγή και η μελέτη γραφημάτων δισδιάστατων δυναμικών, αφού πολλά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν εστιάζοντας στους άξονες συντεταγμένων x και y , που συμπίπτουν με άξονες συμμετρίας.

D.3 Να εκφράσετε την συμπεριφορά του δυναμικού $V(\vec{r})$ κατά μήκος των αξόνων, δηλ., να βρείτε τις συναρτήσεις $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ και $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Να εντοπίσετε τις θέσεις ακρότατων των δυναμικών $V_X(x)$ και $V_Y(y)$ συναρτήσεων ενός και μοναδικού ορίσματος. Λόγω της περιοδικότητας των συναρτήσεων αυτών, παρακαλούμε να συμπεριλάβετε στα αποτελέσματά σας μόνο έναν εκπρόσωπο κάθε οικογένειας περιοδικά επαναλαμβανόμενων ελάχιστων και μέγιστων. 1.2pt

Επιθυμούμε να καθορίσουμε τις θέσεις των αποκαλούμενων τοποθεσιών πλέγματος, δηλ., τα ελάχιστα του πλήρους δισδιάστατου δυναμικού $V(\vec{r})$. Τα ελάχιστα των συναρτήσεων μοναδικού ορίσματος V_X και V_Y υποδηλώνουν τις τοποθεσίες πλέγματος, αλλά θα πρέπει να ελεγχθούν για να εξασφαλιστεί ότι δεν αντιστοιχούν σε σαγματικά σημεία. Όπως φαίνεται στην Εικ. 2c, μελετώντας τα σαγματικά σημεία κατά μήκος μίας διεύθυνσης, ενδέχεται να τα παρερμηνεύσουμε ως ελάχιστα, ενώ δεν είναι τέτοια.

D.4 Να ελέγξετε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ερώτησης για να καθορίσετε τα πραγματικά ελάχιστα του οπτικού πλέγματος: Να ταυτοποιήσετε όλα τα ισοδύναμα ελάχιστα που βρίσκονται κοντά στην αρχή του συστήματος αναφοράς αλλά δεν συμπίπτουν με αυτήν. Ποια είναι η απόσταση a ανάμεσα στα εγγύτερα ελάχιστα, ή, αλλιώς, ποια είναι η σταθερά πλέγματος του οπτικού πλέγματος; Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει του μήκους κύματος λ_{las} του laser. 0.8pt

Η ηλεκτρική ουδετερότητα των υπέρψυχρων ατόμων υποδηλώνει ότι οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις αποκτούν σημασία μόνο όταν δύο ή περισσότερα άτομα καταλαμβάνουν την ίδια τοποθεσία ενός οπτικού πλέγματος. Οι πειραματιστές όμως είναι επίσης σε θέση να διερευνήσουν διατάξεις που επιτρέπουν ατομικές αλληλεπιδράσεις μεγάλης κλίμακας. Μια πιθανή προσέγγιση βασίζεται στην δημιουργία των αποκαλούμενων ατόμων Rydberg που τόσο οι διαστάσεις τους όσο και άλλες φυσικές παράμετροι παίρνουν εξαιρετικά μεγάλες τιμές. Πρόκειται για διεγερμένα άτομα με ένα ηλεκτρόνιο να βρίσκεται σε κατάσταση με πολύ υψηλή τιμή κύριου κβαντικού αριθμού n . Το μέγεθος ενός ατόμου Rydberg μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του υπολογισμού της ακτίνας της κλασικής κυκλικής τροχιάς αυτού του ηλεκτρονίου



με τροχιακή στροφορμή $n\hbar$, όπου $\hbar$ είναι η ανηγμένη σταθερά του Planck.

- | | | |
|------------|---|-------|
| D.5 | Να υπολογίσετε την τιμή του n που αντιστοιχεί σε ακτίνα του ατόμου Rydberg του Rb συγκρίσιμη με το μήκος κύματος $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ ακτίνας laser. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει του λ_{las} και κατάλληλων φυσικών σταθερών. Να υπολογίσετε την αντίστοιχη αριθμητική τιμή. | 1.1pt |
|------------|---|-------|

DELEGATION PRINT

Σωματίδια και Κύματα (10 μονάδες)**Μέρος Α. Κβαντικό σωματίδιο σε κουτί (1.4 μονάδες)****A.1** (0.4 pt)

$E_{\min} =$

A.2 (0.6 pt)

$E_n =$

A.3 (0.4 pt)

$\lambda_{21} =$

Μέρος Β. Οπτικές ιδιότητες των μορίων (2.1 μονάδες)**B.1** (0.8 pt)Έκφραση: $\lambda =$ Αριθμητική τιμή: $\lambda \approx$ **B.2** (0.4 pt)

Να επιλέξετε την ορθή από τις ακόλουθες δύο απαντήσεις. Το φάσμα απορρόφησης του Cy3 είναι μετατοπισμένο προς: ☐ το ιώδες ☐ το ερυθρό

Μετατόπιση φάσματος κατά $\Delta\lambda \approx$ **B.3** (0.7 pt)

$K =$

B.4 (0.2 pt)Αριθμητική τιμή: $\tau_{\text{Cy5}} \approx$ **Μέρος C. Συμπύκνωση Bose-Einstein (1.5 μονάδες)**

C.1 (0.4 pt)

$$p =$$

$$\lambda_{\text{dB}} =$$

C.2 (0.5 pt)

$$\ell =$$

$$T_c =$$

C.3 (0.6 pt)

Έκφραση: $n_c =$

Αριθμητική τιμή: $n_c \approx$

Έκφραση: $n_0 =$

Αριθμητική τιμή: $n_0/n_c \approx$

Μέρος D. Οπτικά πλέγματα τριών ακτίνων (5 μονάδες)

D.1 (1.4 pt)

$$V(\vec{r}) =$$

$$\vec{b}_1 =$$

$$\vec{b}_2 =$$

$$\vec{b}_3 =$$

D.2 (0.5 pt)

Επιχείρημα:

D.3 (1.2 pt)

$$V_X(x) =$$

$$V_Y(y) =$$

Ελάχιστο (-a) of $V_X(x)$: at $x =$

Μέγιστο (-a) of $V_X(x)$: at $x =$

Ελάχιστο (-a) of $V_Y(y)$: at $y =$

Μέγιστο (-a) of $V_Y(y)$: at $y =$

D.4 (0.8 pt)

Λόγος της σταθεράς του πλέγματος προς το μήκος κύματος του laser: $a/\lambda_{\text{las}} =$

Οι θέσεις όλων των ισοδύναμων ελαχίστων που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο αναφοράς:

D.5 (1.1 pt)

Έκφραση: $n =$

Αριθμητική τιμή: $n \approx$



Particles and Waves (10 points)

Part A. Quantum particle in a box (1.4 points)

A.1 (0.4 points)

The width of the potential well (L) should be equal to the half of the wavelength of the de Broglie standing wave $\lambda_{\text{dB}} = h/p$, here h is the Planck's constant and p is the momentum of the particle. Thus $p = h/\lambda_{\text{dB}} = h/(2L)$, and the minimal possible energy of the particle is

$$E_{\text{min}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

A.1 (0.4 pt)

$$E_{\text{min}} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

A.2 (0.6 points)

The potential well should fit an integer number of the de Broglie half-wavelengths: $L = \frac{1}{2}\lambda_{\text{dB}}^{(n)} \cdot n$, $n = 1, 2, \dots$. Therefore, particle's momentum, corresponding to the de Broglie wavelength $\lambda_{\text{dB}}^{(n)}$ is

$$p_n = \frac{h}{\lambda_{\text{dB}}^{(n)}} = \frac{hn}{2L},$$

and the corresponding energy is

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

A.2 (0.6 pt)

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} = E_{\text{min}} n^2.$$

A.3 (0.4 points)

The energy of the emitted photon, $E = hc/\lambda$ (here c is the speed of light and λ is the photon's wavelength) should be equal to the energy difference $\Delta E = E_2 - E_1$, therefore

$$\lambda_{21} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

A.3 (0.4 pt)

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

Part B. Optical properties of molecules (2.1 points)

B.1 (0.8 points)

Taking into account the Pauli exclusion principle, each energy level E_n is occupied by two electrons with spins oriented in the opposite directions. As a result, 10 electrons fill the lowest 5 states, and the absorption of the photon of the longest wavelength corresponds to the transition of one electron from the occupied E_5 to the unoccupied E_6 energy state:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_6 - E_5,$$

where E_6 and E_5 can be found from Eq. 1, where m is replaced with the electron mass m_e . Hence we obtain:

$$\lambda = \frac{c \cdot 8m_e L^2}{h(6^2 - 5^2)} = \frac{10.5^2 \cdot 8 m_e c l^2}{11 h} = \frac{882 m_e c l^2}{11 h} \approx 647 \text{ nm}.$$

This result corresponds precisely to the experimental value the peak position of the Cy5 absorption spectrum.

B.1 (0.8 pt)

Expression: $\lambda = \frac{882 m_e c l^2}{11 h}.$

Numerical value: $\lambda = 647 \text{ nm}.$

B.2 (0.4 points)

In the similar model for the Cy3 molecule, there are 8 electrons in the box of length $L = 8.5l$, thus photon's absorption corresponds to the $E_4 \rightarrow E_5$ transition. Taking into account the result of question B1, we obtain

$$\lambda_{\text{Cy3}} = \frac{8.5^2 \cdot 8 m_e c l^2}{(5^2 - 4^2) h} \approx 518 \text{ nm},$$

i. e. the absorption spectrum of the Cy3 molecule is shifted by $\Delta\lambda \approx 129 \text{ nm}$ to the blue comparing to that of the Cy5 molecule. The experimental value is $\lambda_{\text{Cy3}}^{(\text{exp})} = 548 \text{ nm}$, so that our model catches general properties of these dye molecules rather well.



B.2 (0.4 pt)

Absorption spectrum of Cy3 is shifted to the (check): ☒ bluer ☐ redder
spectral region by $\Delta\lambda \approx 129$ nm.

B.3 (0.7 points)

Let us assume

$$K = k\varepsilon_0^\alpha h^\beta \lambda^\gamma d^\delta. \quad (2)$$

The SI units of the relevant quantities are:

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^3}, \quad [h] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}, \quad [\lambda] = \text{m}, \quad [d] = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}, \quad [K] = \text{s}^{-1}.$$

By plugging these expressions into Eq. 2 we obtain a simple system of linear equations for the unknown powers α , β , γ , and δ :

$$2\alpha + \delta = 0, \quad -\alpha + \beta = 0, \quad 4\alpha - \beta + \delta = -1, \quad -3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0.$$

By solving this system we get:

$$\alpha = \beta = -1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 2,$$

so that the rate of spontaneous emission is

$$K = \frac{16\pi^3}{3} \frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3}. \quad (3)$$

B.3 (0.7 pt)

$$K = \frac{16\pi^3}{3} \frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3}.$$

B.4 (0.2 points)

By using the result of question B.2 and expressing transition dipole moment as $d = 2.4 el$, we obtain from Eq. 3:

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3}{16\pi^3} \frac{\varepsilon_0 h}{2.4^2 l^2 e^2} \lambda^3 \approx 3.3 \text{ ns}.$$

B.4 (0.2 pt)

Numerical value: $\tau_{\text{Cy5}} \approx 3.3$ ns.

**Part C. Bose-Einstein condensation (1.5 points)****C.1 (0.4 points)**

At temperature T , the average kinetic energy of translational motion is $\frac{3}{2}k_B T$. Equating this result to $p^2/(2m)$, we obtain typical momentum $p = \sqrt{3mk_B T}$ and the de Broglie wavelength

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

C.1 (0.4 pt)

$$p = \sqrt{3mk_B T}. \quad \lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

C.2 (0.5 points)

The volume per particle V/N is a good estimate for ℓ^3 . We obtain $\ell = n^{-1/3}$, with $n = N/V$ and equate $\ell = \lambda_{\text{dB}}$ to express $T_c = h^2 n^{2/3}/(3mk_B)$.

C.2 (0.5 pt)

$$\ell = n^{-1/3}. \quad T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}.$$

C.3 (0.6 points)

Using the answer to the previous question, we express $n_c = (3mk_B T_c)^{3/2}/h^3$. Equation of state for the ideal gas gives $n_0 = p/(k_B T)$. Numerical estimations yield $n_c \approx 1.59 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ and $n_0/n_c \approx 1.5 \cdot 10^7$.

C.3 (0.6 pt)

$$\text{Expression: } n_c = \frac{(3 \cdot 87 m_{\text{amu}} k_B T_c)^{3/2}}{h^3}. \quad \text{Numerical value: } n_c \approx 1.59 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

$$\text{Expression: } n_0 = p/(k_B T). \quad \text{Numerical value: } n_0/n_c \approx 1.5 \cdot 10^7.$$



Part D. Three-beam optical lattices (5.0 points)

D.1 (1.4 points)

We sum the three electric fields (z components)

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4)$$

and square the result

$$\begin{aligned} E^2(\vec{r}, t) &= E_0^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \frac{E_0^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \cos[(\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}] + \cos[(\vec{k}_i + \vec{k}_j) \cdot \vec{r} - 2\omega t] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Time averaging gives

$$\langle E^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{E_0^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cos[(\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}], \quad (6)$$

we analyse the 9 terms and simplify to

$$\langle E^2(\vec{r}, t) \rangle = E_0^2 \left(\frac{3}{2} + \sum_{j=1}^3 \cos \vec{b}_j \cdot \vec{r} \right). \quad (7)$$

Here $\vec{b}_{1,2,3} = (\vec{k}_2 - \vec{k}_3), (\vec{k}_3 - \vec{k}_1), (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ or in terms of the Levi-Civita symbol, $\vec{b}_k = \varepsilon_{ijk}(\vec{k}_i - \vec{k}_j)$. Incidentally, they are known as the reciprocal lattice vectors.

D.1 (1.4 pt)

$$V(\vec{r}) = -\alpha E_0^2 \left(\frac{3}{2} + \sum_{j=1}^3 \cos \vec{b}_j \cdot \vec{r} \right).$$

$$\vec{b}_1 = \vec{k}_2 - \vec{k}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{k}_3 - \vec{k}_1, \quad \vec{b}_3 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2.$$

D.2 (0.5 points)

D.2 (0.5 pt)

Argument: Observe that rotation by 60° maps the three vectors $\vec{b}_{1,2,3}$ into the relabelled triplet of $-\vec{b}$'s.



D.3 (1.2 points)

We find

$$V(x, y) = -\alpha E_0^2 \left\{ \frac{3}{2} + \cos(ky\sqrt{3}) + \cos\left(\frac{3kx}{2} + \frac{ky\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(\frac{3kx}{2} - \frac{ky\sqrt{3}}{2}\right) \right\}, \quad (8)$$

and deduce

$$V_X(x) = -\alpha E_0^2 \left\{ \frac{5}{2} + 2 \cos \frac{3kx}{2} \right\}. \quad (9)$$

The potential has a simple cosine form, and the origin is an obvious minimum. Its replica appears at multiples of $\Delta x = 4\pi/(3k)$. In the midpoint between any two minima, e.g. at $x = \Delta x/2 = 2\pi/(3k)$, the function $V_X(x)$ has its maxima.

Concerning the behaviour along the y axis, we have

$$V_Y(y) = -\alpha E_0^2 \left\{ \frac{3}{2} + \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi \right\}, \quad \varphi = \sqrt{3}ky/2. \quad (10)$$

Looking for the extrema, we find the equation

$$\sin 2\varphi + \sin \varphi = 0. \quad (11)$$

- $\varphi = 0$ is the ‘deep’ minimum – the lattice site;
- $\varphi = \pi$ is the ‘shallow’ minimum (later shown to be a saddle point of $V(x, y)$);
- $\varphi = 2\pi/3$ and $\varphi = 4\pi/3$ are maxima.

D.3 (1.2 pt)

$$V_X(x) = -\alpha E_0^2 \left\{ \frac{3}{2} + 2 \cos \frac{3kx}{2} \right\}.$$

$$V_Y(y) = -\alpha E_0^2 \left\{ \frac{3}{2} + \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi \right\}, \quad \text{here } \varphi = \sqrt{3}ky/2.$$

Minimum (-a) of $V_X(x)$: $x = 0$.

Maximum (-a) of $V_X(x)$: $x = \frac{2\pi}{3k}$.

Minimum (-a) of $V_Y(y)$: $y = 0$ (‘deep’) and $y = \frac{2\pi}{\sqrt{3}k}$ (‘shallow’).

Maximum (-a) of $V_Y(y)$: $y = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}k}$ and $y = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}k}$.

D.4 (0.8 points)

We review the minima found in the previous question and eliminate the saddle point at $(0, 2\pi/3\sqrt{3}k)$. The actual minima of the 2D potential landscape $V(x, y)$ are:

- $(0, 0)$ – at the origin;
- $(4\pi/(3k), 0)$ – nearest to the origin in the positive direction along the x axis. On the grounds of symmetry we argue that there are six equivalent nearest minima in the directions $0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$, and 180° with respect to the x axis.

Distance between nearest minima (the lattice constant) $a = 4\pi/(3k)$. Given that the laser wavelength is $\lambda_{\text{las}} = 2\pi/k$, we have $a = \Delta x = 2\lambda_{\text{las}}/3$.

D.4 (0.8 pt)

Ratio of the lattice constant to the laser wavelength: $a/\lambda_{\text{las}} = \frac{2}{3}$

Positions of all equivalent minima nearest to the origin: **in the directions $0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$, and 180° with respect to the x axis.**

D.5 (1.1 points)

The atom's core electrons (all but the one promoted to to a state with a high principal quantum number n) shield the electric field of the nucleus so that the effective potential for the outer electron resembles that of a hydrogen atom. The attractive force acting on that electron, $F = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, gives rise to its centripetal acceleration $a = v^2/r$. Equating $F = m_e a$ and using the expression for the angular momentum $m_e v r = n\hbar$ to eliminate the velocity, we find the quantum number n corresponding to the orbit with the radius $r = \lambda_{\text{las}}$:

$$n = \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{m_e \lambda}{4\pi\epsilon_0}} \approx 85. \quad (12)$$

D.5 (1.1 pt)

Expression: $n = \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{m_e \lambda}{4\pi\epsilon_0}}$.

Numerical value: $n \approx 85$.



Particles and Waves (10 points)

General note: if student got the correct answer and the solution is physically and mathematically correct, all the points should be given.

Part A. Quantum particle in a box (1.4 points)

A.1 (0.4 pt.)	Relation between λ_{dB} and p	0.2
	Relation between λ_{dB} and L	0.1
	Correct answer	0.1
A.3 (0.6 pt.)	Relation between $\lambda_{dB}^{(n)}$ and L	0.4
	Correct answer	0.2
A.4 (0.4 pt.)	Relation between photon's energy and wavelength	0.2
	Correct answer	0.2

Part B. Optical properties of molecules (2.1 points)

B.1 (0.8 pt.)	Identify that absorption corresponds to the transition between E_5 and E_6 If any other two levels are used, give 0 pt. for this part, but mathematically correct answer for the chosen energy levels can still be scored with the remaining 0.2 + 0.1 pt.	0.5
	Correct expression	0.2
	Correct numerical value	0.1
B.2 (0.4 pt.)	Correct expression for λ_{Cy3}	0.2
	Correct check	0.1
	Correct numerical value of $\Delta\lambda$	0.1
B.3 (0.7 pt.)	Correct units	0.2
	Correct answer	0.5
B.3 (0.2 pt.)	Correct answer	0.2



Part C. Bose-Einstein condensation (1.5 points)

C.1 (0.4 pt.)	Idea to base estimates on $p^2/(2m) = 3k_B T/2$	0.2
	Correct answer for the momentum	0.1
	Correct calculation of the de Broglie wavelength	0.1
C.2 (0.5 pt.)	Volume per particle V/N as an estimate for ℓ	0.2
	Correct answer for the distance ℓ	0.1
	Correct answer for the critical temperature T_c	0.2
C.3 (0.6 pt.)	Correct expression for n_c	0.2
	Correct numerical value for the density n_c	0.1
	Correct expression for n_0	0.2
	Correct numerical value for the ratio n_0/n_c	0.1

Part D. Three-beam optical lattices (5.0 points)

D.1 (1.4 pt.)	Individual laser fields summed	0.2
	Correct squaring and averaging	0.6
	Correct answer for $V(\vec{r})$	0.3
	Vectors $\vec{b}$ identified as differences of $\vec{k}$ (in any order)	0.3
D.2 (0.5 pt.)	Convincing argument	0.5
D.3 (1.2 pt.)	Correct calculation of $V_X(x)$	0.3
	Correct calculation of $V_Y(y)$	0.3
	Six inequivalent extrema identified (0.1 pt per each)	0.6
D.4 (0.8 pt.)	Correct calculation of the lattice constant	0.4
	Existence of 6 equivalent minima identified	0.2
	Correct identification of the positions	0.2
D.5 (1.1 pt.)	Correct description of force on the outer electron	0.4
	Screening by core electrons overlooked	-0.1
	Correct expression for the angular momentum	0.2
	Correct calculation of the principal quantum number n	0.4
	Correct numerical value for n	0.1