Γ΄ Λυκείου

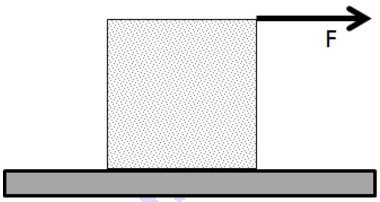
7 Μαρτίου 2015

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε χαρτί Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί (το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης). Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα γραφήματα ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.
2. Τα γραφήματα του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο μιλιμετρέ χαρτί που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.
3. Οι απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα τόσο του **Θεωρητικού Μέρους** όσο και του **Πειραματικού** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν στο *"Φύλλο Απαντήσεων"* που θα σας δοθεί μαζί μετις εκφωνήσεις των θεμάτων.

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο



Ομογενές σώμα κυβικού σχήματος βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και δέχεται στην πάνω έδρα του σταθερή οριζόντια δύναμη με φορά προς τα δεξιά (βλ. σχήμα), υπό την επίδρασή της οποίας ολισθαίνει εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση χωρίς να ανατρέπεται.

Α1. Ο φορέας του βάρους του σώματος
α. βρίσκεται αριστερότερα του **β.** συμπίπτει με το **γ.** βρίσκεται δεξιότερα του
φορέα της αντίδρασης Ν του δαπέδου.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

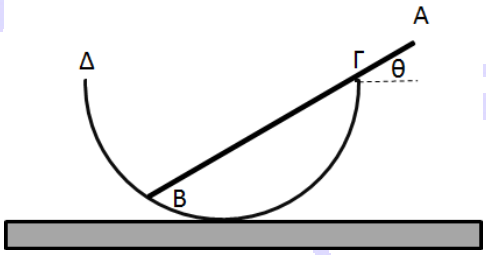
Α2. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο δάπεδο και στο σώμα προκειμένου αυτό να μην ανατρέπεται πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του:
α. 1/2 **β.** 1/3 **γ.** 1/4
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 2ο

Στα σημεία Α και Β επίπεδου ελαστικού μέσου βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ που δημιουργούν Γραμμικά Αρμονικά Κύματα με Α=1cm, λ=0,8m και Τ=0,2s. Η ταλάντωση ενός σημείου Κ του ελαστικού μέσου ξεκινά τη στιγμή t_1=0,1s, ενώ τη στιγμή t_o=0,25 s το πλάτος ταλάντωσής του έχει ήδη γίνει $\sqrt{2}$cm.

Α) Να βρείτε τις αποστάσεις r_1 και r_2 του Κ από τις δύο πηγές.
Β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης του σημείου Κ ως προς το χρόνο από τη στιγμή 0 μέχρι τη στιγμή 5Τ.

Θέμα 3ο



Δοχείο ημισφαιρικού σχήματος κέντρου Ο και ακτίνας R με τέλεια λεία τοιχώματα στερεώνεται σε οριζόντιο δάπεδο, κατά τρόπο ώστε η διάμετρος ΓΔ να είναι οριζόντια. Μέσα σε αυτό τοποθετείται πολύ λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους 2s (με s>R) και βάρους w, η οποία αφήνεται να ισορροπήσει σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Να υπολογίσετε:
Α. τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από το δοχείο,
Β. το μήκος ΑΓ=x του τμήματος της ράβδου που εξέχει από το δοχείο,
Γ. τις τιμές της γωνίας θ για τις οποίες είναι δυνατή η ισορροπία της ράβδου.

Πειραματικό Μέρος

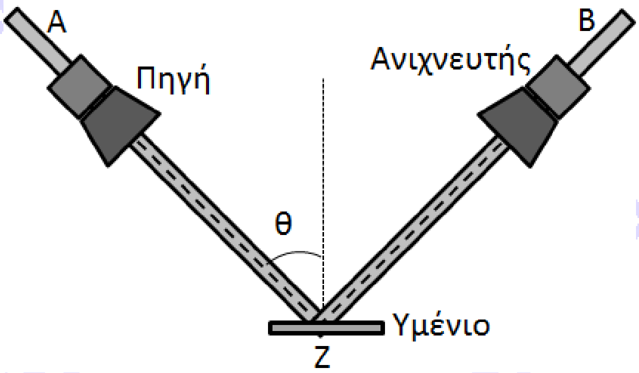
Συμβολή σε λεπτά υμένια

Ένα λεπτό στρώμα λαδιού που επιπλέει σε νερό, ή μια ποσότητα πετρελαίου που βρίσκεται στο οδόστρωμα ονομάζονται υμένια. Υμένιο επίσης ονομάζεται το λεπτό περίβλημα που δημιουργεί μια σαπουνόφουσκα.

Αν ένα υμένιο φωτιστεί με μονοχρωματικό φως, τότε ενδέχεται να παρατηρήσουμε (υπό κατάλληλη γωνία θέασης) φωτεινές και σκοτεινές περιοχές.Το φαινόμενο αυτό είναι αποτέλεσμα συμβολής που υφίστανται οι ακτίνες φωτός που φτάνουν στο μάτι μας έχοντας ανακλαστεί από τις απέναντι επιφάνειες που οριοθετούν το υμένιο. Αν, αντίθετα, φωτίσουμε το υμένιο με λευκό φως θα δούμε έγχρωμους ιριδισμούς με τα διάφορα χρώματα να εναλλάσσονται μεταξύ τους σε διάφορες περιοχές της επιφάνειας του υμενίου.

Στην περίπτωση μονοχρωματικού φωτός οι θέσεις των φωτεινών και σκοτεινών περιοχών εξαρτώνται από το μήκος κύματος λ του φωτός, το πάχος d του υμενίου, τη γωνία πρόσπτωσης θ και το δείκτη διάθλασης n.

Προκειμένου να μετρήσουμε το δείκτη διάθλασης ενός υμενίου χρησιμοποιούμε την πειραματική διάταξη του σχήματος (Δε θα χρησιμοποιήσουμε ορατό φως, αφού τα μικρά μήκη κύματος δε βοηθούν στη λήψη καλών μετρήσεων, αλλά μικροκυματική ακτινοβολία με λ τάξης μεγέθους cm).



Δύο βραχίονες Α και Β έχουν αρθρωθεί στο σημείο Ζ κατά τρόπο ώστε η περιστροφή του ενός να προκαλεί ταυτόχρονη και ισόποση περιστροφή του άλλου (όπως σε έναν καλής ποιότητας διαβήτη)

Μια πηγή μικροκυμάτων εκπέμπει Η/Μ κύμα το οποίο προσπίπτει στο υμένιο. Με τη βοήθεια του ανιχνευτή, ο οποίος μετατρέπει την ένταση της ακτινοβολίας σε ένταση ηλεκτρικού ρεύματος και συνδέεται με ευαίσθητο αμπερόμετρο, καταγράφουμε την ένταση των κυμάτων που ανακλώνται στην πάνω και την κάτω επιφάνεια του υμενίου και συμβάλλουν.

Τροποποιώντας τη γωνία θ (σε μοίρες) λαμβάνουμε σειρά μετρήσεων της έντασης Ι του ρεύματος (σε mA),τις οποίες καταγράφουμε στον ακόλουθο πίνακα:

θ	Ι	θ	Ι	θ	Ι	θ	Ι
38,0	0,307	47,0	0,041	56	0,564	65	0,858
39,0	0,269	48,0	0,067	57	0,621	66	0,904
40,0	0,227	49,0	0,136	58	0,666	67	0,968
41,0	0,195	50,0	0,215	59	0,593	68	1,023
42,0	0,165	51,0	0,264	60	0,72	69	1,017
43,0	0,113	52,0	0,321	61	0,752	70	0,926
44,0	0,064	53,0	0,389	62	0,797	71	0,8
45,0	0,035	54,0	0,453	63	0,829	72	0,771
46,0	0,022	55,0	0,513	64	0,834	73	0,916

Όλες οι τιμές της γωνίας συνοδεύονται από σφάλμα $0,5^o$ και της έντασης του ρεύματος από σφάλμα 0,001 mA.

Δ1. Να βρείτε μαθηματικές εκφράσεις για την ενισχυτική και την αποσβετική συμβολή σε συνάρτηση με τα θ, λ, d και n. Να λάβετε υπόψη σας ότι η ανακλώμενη ακτίνα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που κινείται από οπτικώς αραιότερο προς οπτικώς πυκνότερο μέσο διάδοσης, υφίσταται αλλαγή φάσης κατά π σε σχέση με την προσπίπτουσα.

Δ2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση I=f(θ) και να προσδιορίσετε όσο καλύτερα μπορείτε την τιμή της γωνίας για την οποία έχουμε αποσβετική συμβολή (έστω θ_{min}) και την τιμή της γωνίας για την οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή (έστω θ_{max}).

Δ3. Αν γνωρίζετε ότι ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι $n_\alpha=1$, το πάχος του υμενίου είναι d=4,6cm καιτο μήκος κύματος της Η/Μ ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται για τις μετρήσεις είναι λ=2,7cm να βρείτε την τιμή του δείκτη διάθλασης του υμενίου με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων. *Αν δεν έχετε δυνατότητα υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών γράψτε τελικούς τύπους υπολογισμού του ζητούμενου αποτελέσματος σε συνάρτηση με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που εμφανίζονται σε αυτό.*

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Γ΄ Λυκείου
ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος
Θέμα 1ο

Α1. Σωστή είναι η πρόταση: ....

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ: ....

....

....

....

....

....

Α2. Σωστή είναι η πρόταση: ....

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ: ....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 2ο

Α. $r_1 =$...................... $r_2 =$......................

Β. Να σχεδιάσετε το γράφημα στο τετράδιό σας

Θέμα 3ο

Α.

$F_1 =$..

$F_2 =$..

Β.

$x =$..

Γ. Για τη γωνία θ ισχύει ....

Πειραματικό Μέρος

Δ1. Για ενισχυτική συμβολή ....

Για αποσβετική συμβολή ....

Δ2. Σχεδιάστε το γράφημα στο μιλιμετρέ χαρτί των εκφωνήσεων.

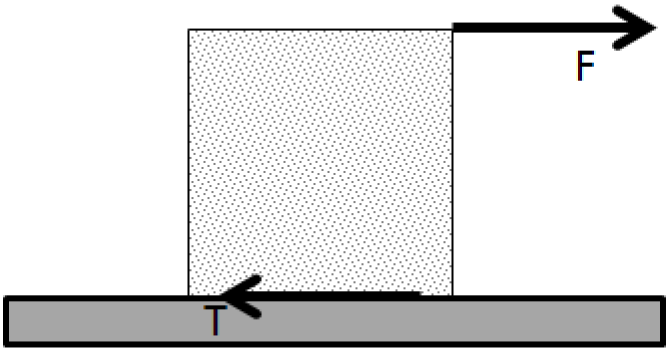
$\theta_{min} \cong$........................... $\theta_{max} \cong$...........................

Δ2. $n =$...........................

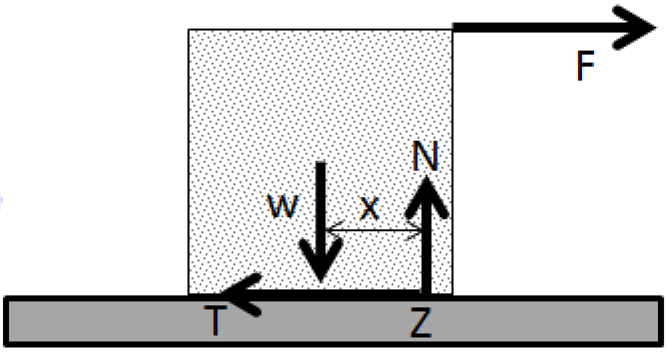
Συνοπτικές Απαντήσεις
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α1. Οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{T}$ αποτελούν ζεύγος, η ροπή του οποίου μπορεί να θέσει το σώμα σε περιστροφή με φορά εκείνη των δεικτών του ρολογιού (αρνητική)



Αφού το σώμα δεν ανατρέπεται, συμπεραίνουμε ότι η συνολική ροπή που δέχεται πρέπει να είναι μηδενική. Άρα οι $\vec{w}$ και $\vec{N}$ πρέπει επίσης να αποτελούν ζεύγος με ροπή θετική. Άρα ο φορέας του βάρους βρίσκεται αριστερότερα του φορέα της αντίδρασης του δαπέδου. Σωστή απάντηση λοιπόν είναι η **α**.



Α2.Αφού το σώμα κατά τη μεταφορική του κίνηση ισορροπεί θα ισχύουν:

$$\left.\begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F - T = 0 \\ N - w = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F = T \\ N = w \end{matrix}\right\}$$

Με βάση τη σχέση $T = \mu N$ καταλήγουμε στην $F = \mu w \Rightarrow \mu = \frac{F}{w}$

Για απλούστευση της εξίσωσης υπολογίζουμε τη συνισταμένη ροπή ως προς το σημείο εφαρμογής της N, έστωZ, ως προς το οποίο τόσο η ροπή της Τριβής όσο και της αντίδρασης είναι μηδέν. Συμβολίζοντας με s το μήκος της πλευράς του κύβου, έχουμε:

$$wx = Fs \Rightarrow x = \frac{F}{w}s \Rightarrow x = \mu s$$

Προφανώς πρέπει $x \leq \frac{s}{2}$

αφού το σώμα είναι ομογενές (άρα το βάρος ασκείται στο γεωμετρικό του κέντρο) και η δύναμη στήριξης N πρέπει να ασκείται σε κάποιο σημείο της βάσης του.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές έχουμε $\mu s \leq \frac{s}{2} \Rightarrow \mu \leq \frac{1}{2}$.

Άρα σωστή είναι η περίπτωση **α**.

Θέμα 2ο
Α.Γνωρίζουμε ότι το Κ παραμένει ακίνητο μέχρι τη στιγμή 0,1 s, εκτελεί Γ.Α.Τ. με πλάτος Α=1cm και περίοδο Τ=0,2 s, από t_1=0,1 s μέχρι t_2 και στη συνέχεια εκτελεί Γ.Α.Τ. με πλάτος Α=$\sqrt{2}$cm και περίοδο Τ=0,2 s. Προφανώς η στιγμή t_1 αντιστοιχεί στην άφιξη της διαταραχής από την πλησιέστερη πηγή, έστω $Π_1$, ενώ η t_2 στην άφιξη της διαταραχής και από την άλλη πηγή, $Π_2$, οπότε το Κ εκτελεί πλέον σύνθετη ταλάντωση.

Αφού λοιπόν t_1=Τ/2, συμπεραίνουμε ότι r_1=λ/2=0,4 m.

Γνωρίζουμε ότι μετά την έναρξη της συμβολής, το πλάτος της (σύνθετης) ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda}\right)\right|$.

Αντικαθιστώντας, έχουμε $\sqrt{2} = \left|2\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda}\right)\right| \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \pi\frac{|r_1-r_2|}{\lambda} = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{|r_1-r_2|}{\lambda} = \kappa + \frac{1}{4} \Rightarrow |r_1-r_2| = \left(\kappa+\frac{1}{4}\right)\lambda$$

Αφού r_2>r_1 καταλήγουμε στη σχέση:

$$r_2 - r_1 = (4\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow r_2 = (4\kappa+1)\frac{\lambda}{4} + r_1 \Rightarrow r_2 = (4\kappa+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_2 = (4\kappa+3)\frac{\lambda}{4}$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε τις τιμές:

κ	0	1	2	3	…
r_2	$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{7\lambda}{4}$	$\frac{11\lambda}{4}$	$\frac{15\lambda}{4}$	…

Οι οποίες αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές:

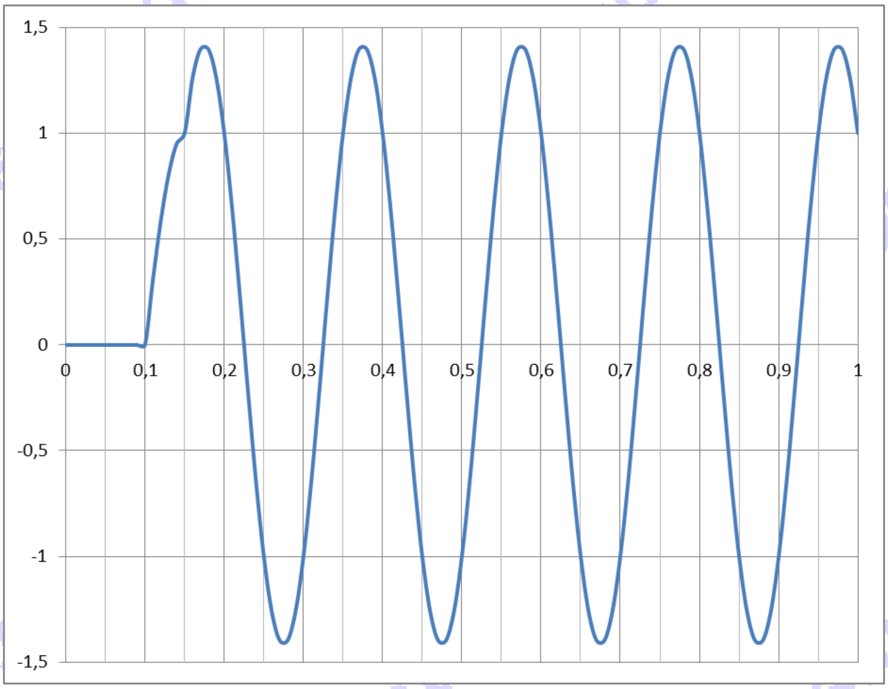
t_2	$\frac{3T}{4}$	$\frac{7T}{4}$	$\frac{11T}{4}$	$\frac{15T}{4}$	…

Αφού τη στιγμή t_o=0,4sέχει ήδη ολοκληρωθεί η συμβολήθα πρέπει t_1<t_2<t_o, δηλ

$$t_1 < (4\kappa+3)\frac{T}{4} < t_o \Rightarrow 0{,}1 < (4\kappa+3)\frac{0{,}2}{4} < 0{,}25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < (4\kappa+3)\frac{2}{4} < 2{,}5 \Rightarrow 2 < 4\kappa+3 < 5 \Rightarrow -1 < 4\kappa < 2 \Rightarrow \frac{-1}{4} < \kappa < \frac{2}{4} \Rightarrow \kappa = 0$$

Άρα r_2=3λ/4=0,6m
Β.Το ζητούμενο γράφημα είναι το ακόλουθο:

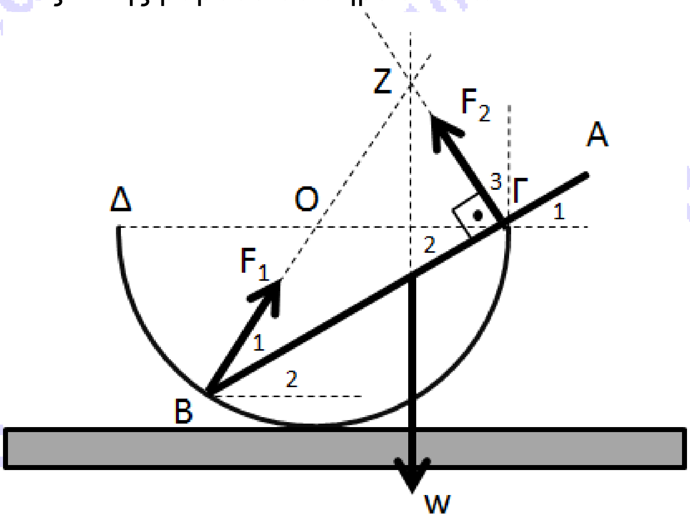


όπου φαίνεται η διαφορά στην καμπυλότητα τη στιγμή που ξεκινά η συμβολή.

Θέμα 3°

Α. Λόγω της λείας επιφάνειας η δύναμη στο σημείο Β (έστω F_1) θα έχει ακτινική διεύθυνση, ενώ η δύναμη στο Γ (έστω F_2) θα είναι κάθετη στη ράβδο.

Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει οι φορείς των δύο αυτών δυνάμεων να τέμνονται με το φορέα του βάρους w της ράβδου σε σημείο έστω Ζ.



Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\theta = B_2$(ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες), $\theta = \Gamma_1 = \Gamma_2$ (ως κατακορυφήν), $B_1 = \Gamma_2$(το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές με ΟΒ=ΟΓ=R) και $\Gamma_3 = \Gamma_1 = \theta$ (ως οξείες γωνίες με τις πλευρές τους κάθετες).

Άρα η διεύθυνση της F_1 σχηματίζει γωνία 2θ με την οριζόντια διεύθυνση ενώ της F_2 σχηματίζει γωνία θ+π/2.

Για τα μέτρα των δυνάμεων προκύπτει από τις συνθήκες ισορροπίας κατά άξονα:

$F_{1x} = F_{2x} \Rightarrow F_1 συν2\theta = F_2 ημ\theta$

και

$F_{1y} + F_{2y} = w \Rightarrow F_1 ημ2θ + F_2 συνθ = w$
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

$$F_1 = \frac{w\, ημθ}{ημθημ2θ + συνθσυν2θ}$$

και

$$F_2 = \frac{w\, συν2θ}{ημθημ2θ + συνθσυν2θ}$$

Όμως από γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα η έκφραση $ημθημ2θ + συνθσυν2θ$ γράφεται στη μορφή

$$συν(2θ - θ) = συνθ$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με τις ταυτότητες διπλασίου τόξου.
Οπότε τα προηγούμενα αποτελέσματα παιρνουν την απλούστερη μορφή:

$$F_1 = wεφθ$$

και

$$F_2 = \frac{w\, συν2θ}{συνθ}$$

Β. Έστω x η ζητούμενη απόσταση ΑΓ. Υπολογίζοντας τη συνισταμένη ροπή ως προς Β έχουμε:

$$w\, s\, συνθ - F_2(2s - x) = 0$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα από το ερώτημα **Α.** έχουμε:

$$w\, s\, συνθ = \frac{w\, συν2θ}{συνθ}(2s - x) \Rightarrow s\, συνθ = \frac{συν2θ}{συνθ}(2s - x)$$

$$\Rightarrow \frac{s\, συν^2θ}{συν2θ} = 2s - x \Rightarrow x = 2s - \frac{s\, συν^2θ}{συν2θ}$$

$$\Rightarrow x = s\left(2 - \frac{συν^2θ}{συν2θ}\right) \Rightarrow x = s\frac{2συν2θ - συν^2θ}{συν2θ} \Rightarrow x = s\frac{4συν^2θ - 2 - συν^2θ}{συν2θ}$$

$$\Rightarrow x = s\frac{3συν^2θ - 2}{συν2θ}$$

Γ. Το προηγούμενο αποτέλεσμα μοιάζει να αφήνει περιθώριο για ένα εύρος τιμών της γωνίας θ. Στην πραγματικότητα όμως η συνθήκη που προαναφέρθηκε στη λύση του ερωτήματος **Α.** (δηλ. ότι οι φορείς των F_1 και F_2 πρέπει να τέμνονται στο ίδιο σημείο με το φορέα του w) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η γωνία θ έχει μία και μοναδική τιμή. Πραγματικά, εφαρμόζοντας Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΓ και με δεδομένο ότι η $Γ_2$ ισούται με θ, προκύπτει:

$$OB^2 = OΓ^2 + BΓ^2 - 2OΓ \cdot OBσυνθ \Rightarrow R^2 = R^2 + (2s - x)^2 - 2R \cdot (2s - x)συνθ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (2s - x)^2 - 2R \cdot (2s - x)συνθ \Rightarrow (2s - x)^2 = 2R \cdot (2s - x)συνθ$$

Προφανώς είναι $2s - x \neq 0$. Απλοποιώντας προκύπτει:

$$2s - x = 2R \cdot συνθ$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα από το ερώτημα **Β.** έχουμε:

$$2s - s\frac{3συν^2θ - 2}{συν2θ} = 2R \cdot συνθ \Rightarrow s\frac{2συν2θ - 3συν^2θ + 2}{συν2θ} = 2R \cdot συνθ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\frac{4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2 - 3\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow s\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

Δεδομένου ότι η θ αποκλείεται να είναι ορθή, το συνημίτονό της δε μπορεί να είναι μηδέν. Απλοποιώντας έχουμε:

$$s\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} = 2R \Rightarrow s\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} = 2R \Rightarrow s\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\sigma\upsilon\nu\theta = 4R\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2R \Rightarrow 4R\sigma\upsilon\nu^2\theta - s\sigma\upsilon\nu\theta - 2R = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει $\Delta = s^2 + 32R^2 > 0$, άρα έχουμε δύο πραγματικές ρίζες:

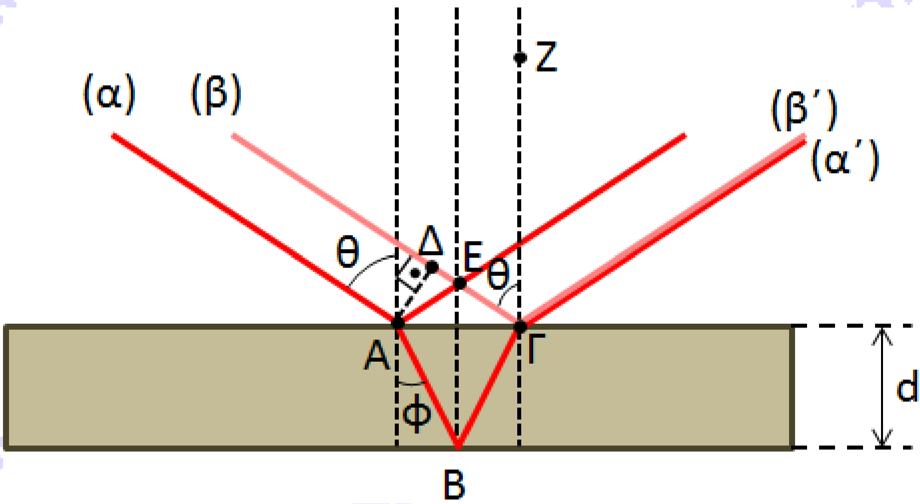
$$\sigma\upsilon\nu\theta = \begin{cases} \dfrac{s + \sqrt{s^2 + 32R^2}}{8R} \\ \dfrac{s - \sqrt{s^2 + 32R^2}}{8R} \end{cases}$$

Η δεύτερη είναι εμφανώς αρνητική, άρα απορρίπτεται, καθώς η γωνία θ είναι οξεία. Καταλήγουμελοιπόν στην έκφραση:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{s + \sqrt{s^2 + 32R^2}}{8R}$$

Πειραματικό Μέρος

Δ1. Έστω δύο ακτίνες (α) και (β) όπως στο σχήμα. Η διαθλώμενη στο σημείο Α ανακλάται στο Β και εξέρχεται από το υμένιο μετά από δεύτερη διάθλαση στο Γ, οπότε και συμβάλλει με την ακτίνα (β) που ανακλάται στο Γ. Για την (α) σημειώνουμε με θ τη γωνία πρόσπτωσης και με φ τη γωνία διάθλασης. Για την ακτίνα (β) ισχύουν προφανώς τα ίδια. Η διαφορά φάσης των δύο ακτίνων οφείλεται (σε πρώτη αντιμετώπιση) στην επί πλέον διαδρομή ("διαφορά δρόμου") Δx που διανύει η ακτίνα (α) σε σχέση με τη (β). Από το σχήμα φαίνεται ότι Δx=ΑΒ+ΒΓ-ΔΓ.



Όμως, για να κάνουμε σωστά τον υπολογισμό πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η διαδρομή ΑΒ+ΒΓ πραγματοποιείται μέσα στο υμένιο που έχει δείκτη διάθλασης n, ενώ η ΔΓ στον αέρα. Για να είναι συγκρίσιμες οι διαδρομές πρέπει να τις ανάγουμε στο ίδιο μέσο διάδοσης.

Για παράδειγμα, μέσα στο υμένιο το φως διασχίζει την απόσταση AB σε χρόνο t, για τον οποίο ισχύει:

$$t = \frac{AB}{c} \Rightarrow t = \frac{AB}{\frac{c_o}{n}} \Rightarrow t = \frac{nAB}{c_o}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει πως αν η κίνηση γινόταν στον αέρα (με ταχύτητα c_o), θα αντιστοιχούσε σε μήκος nAB.

Τελικά λοιπόν η διαφορά δρόμων ισούται με $\Delta x = n(AB + B\Gamma) - \Delta\Gamma = 2nAB - \Delta\Gamma$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $AB = \frac{d}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$ και $\frac{A\Gamma}{2} = d\ \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow A\Gamma = 2d\ \varepsilon\varphi\varphi$

Επίσης βλέπουμε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}Z$ ισούται με θ, αφού οι (α) και (β) είναι παράλληλες. Άρα η $\Delta\hat{\Gamma}A$ είναι συμπληρωματική της θ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο (με ορθή τη γωνία Δ) οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}A$ είναι επίσης συμπληρωματικές. Άρα $\Delta\hat{A}\Gamma$=θ. (Εναλλακτικά: οι θ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες, άρα είναι ίσες). Άρα

$$\Delta\Gamma = A\Gamma\ \eta\mu\theta \Rightarrow \Delta\Gamma = 2d\ \varepsilon\varphi\varphi\ \eta\mu\theta$$

Έτσι $\Delta x = 2n\frac{d}{\sigma\upsilon\nu\varphi} - 2d\ \varepsilon\varphi\varphi\ \eta\mu\theta = 2d\left(\frac{n}{\sigma\upsilon\nu\varphi} - \varepsilon\varphi\varphi\ \eta\mu\theta\right)$

Από το νόμο της διάθλασης προκύπτει $\eta\mu\theta = n\eta\mu\varphi$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\Delta x = 2d\left(\frac{n}{\sigma\upsilon\nu\varphi} - \varepsilon\varphi\varphi\ n\eta\mu\varphi\right) = 2d\left(\frac{n}{\sigma\upsilon\nu\varphi} - \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\ n\eta\mu\varphi\right) = 2d\frac{n - n\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = 2d\frac{n(1-\eta\mu^2\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \Delta x = 2d\sqrt{n^2(1-\eta\mu^2\varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = 2d\sqrt{n^2 - n^2\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = 2d\ \sqrt{n^2 - \eta\mu^2\theta}$$

Κατά την ανάκλαση στο Α η φάση της ακτινοβολίας μεταβάλλεται κατά π επειδή η ακτίνα ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ οπτικώς αραιότερου και οπτικώς πυκνότερου μέσου διάδοσης. Αντίθετα, κατά την ανάκλαση στο Β, όπου ισχύει το αντίστροφο, δε συμβαίνει αλλαγή στη φάση της ακτίνας (α).

Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την αλλαγή φάσης καταλήγουμε στις σχέσεις (αντίστροφες εκείνων που προκύπτουν κατά τη συνήθη διαπραγμάτευση της Συμβολής):

Για ενισχυτική συμβολή $\Delta x_{\varepsilon\nu\iota\sigma\chi} = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2d\ \sqrt{n^2 - \eta\mu^2\theta} = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ **(1)**

Για αποσβετική συμβολή $\Delta x_{\alpha\pi\acute{o}\sigma\beta} = N\lambda \Rightarrow 2d\ \sqrt{n^2 - \eta\mu^2\theta} = N\lambda$ **(2)**

που είναι οι ζητούμενες μαθηματικές εκφράσεις.

Δ2. Από τις μετρήσεις έχουμε το γράφημα του ακόλουθου σχήματος.

Από αυτό φαίνεται καθαρά ότι υπάρχει μια περιοχή τιμών της θ όπου παρατηρείται σταθερή αύξηση της ακτινοβολίας, από ένα ελάχιστο (όχι ίσο με το μηδέν, αφού, προφανώς η πλήρης απόσβεση δεν εμφανίζεται σε ακέραια τιμή του θ) μέχρι ένα μέγιστο. Προφανώς η μέτρηση για θ=59^o είναι αποτυχημένη, αλλά αυτό δεν αλλοιώνει την αξία των υπόλοιπων μετρήσεών μας.

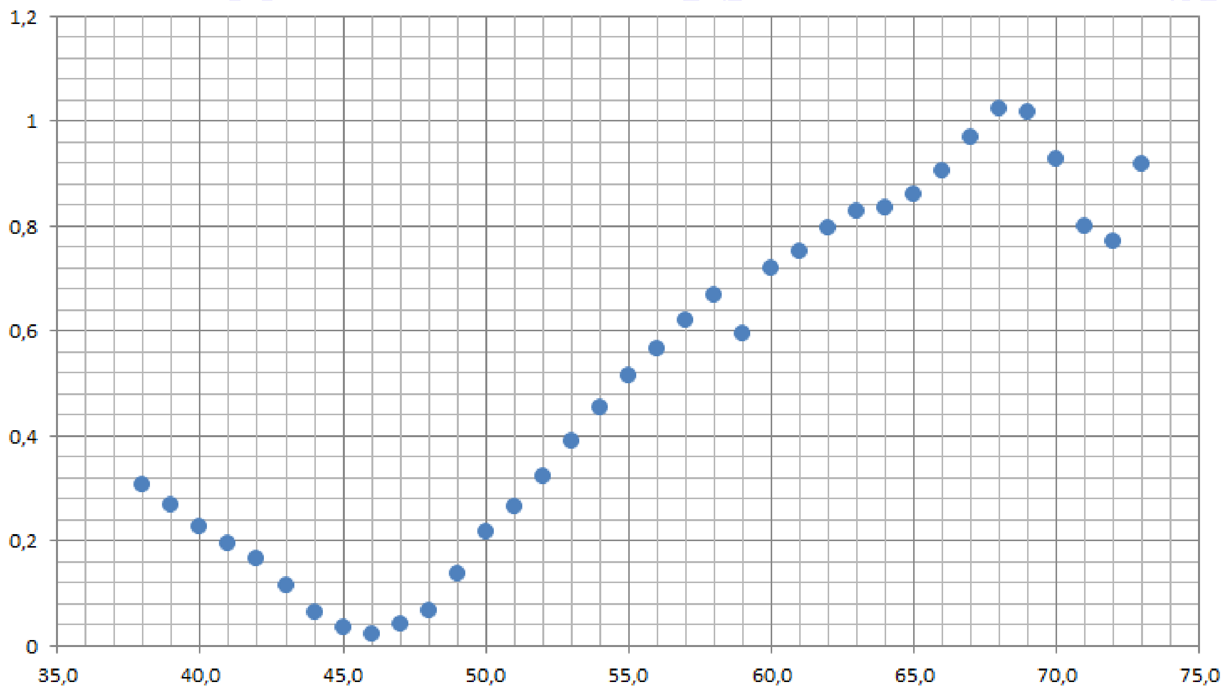
Καταλήγουμε λοιπόν ότι:

$$\theta_{min} \cong 46°$$

αφού για αυτή την τιμή έχουμε την ελάχιστη ένταση ρεύματος.

Για τη θ_{max} παρατηρούμε ότι το γράφημα δεν παρουσιάζει σαφές μέγιστο. Λαμβάνοντας υπόψη τα σφάλματα των μετρήσεων που αναφέρονται στην εκφώνηση, επιλέγουμε την τιμή

$$\theta_{max} \cong 68{,}5°.$$



Δ3. Τα αποτελέσματα (1) και (2) γράφονται:

$$\Delta x_{ενισχ} = 2d\sqrt{n^2 - ημ^2 68{,}5°} = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta x_{απόσβ} = 2d\sqrt{n^2 - ημ^2 46°} = N\lambda$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα N (τάξη κροσσού συμβολής) και n (ζητούμενος δείκτης διάθλασης του υμενίου).
Εφόσον μας ζητείται μόνο το n, θα μπορούσαμε να λύσουμε μερικώς το σύστημα, οπότε θα παίρναμε το αποτέλεσμα

$$n = 1{,}45$$

(με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων).

Όμως αυτό το αποτέλεσμα είναι **ΛΑΘΟΣ**.
Πραγματικά, αν λύσουμε πλήρως το σύστημα παίρνουμε τις τελικές εκφράσεις:

$$N = \frac{1}{4} + 4d^2\frac{ημ^2 68{,}5° - ημ^2 46°}{\lambda^2}$$

και

$$n = \sqrt{\frac{N^2\lambda^2}{4d^2} + ημ^2 46°}$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε:

$$N = 4{,}2930.$$

Αφού όμως ότι το N είναι φυσικός αριθμός η πραγματική τιμή του δε μπορεί παρά να είναι $N = 4$.
Για την τιμή αυτή έχουμε

$$n = 1{,}38$$

που είναι η ορθή απάντηση και διαφέρει σημαντικά από την προηγούμενη.