ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ ΛΕΣΧΩΝ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑΣ

ΠΑΡΟΣ
3-7
Ιουλίου 2006

Ο Θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ

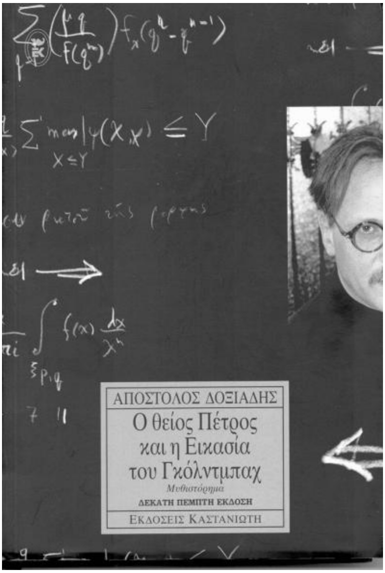
Νίκος Σάββας
Μαθηματικός
nasav@geitonas-school.gr

Κάποια παραμαθηματικά θέματα
με αφορμή
την ανάγνωση του μυθιστορήματος
του Απόστολου Δοξιάδη

Ο Θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ

Α. Ο συγγραφέας και το μυθιστόρημα

Ο ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΟΞΙΑΔΗΣ είναι μαθηματικός, συγγραφέας και ο βασικός ιδρυτής του **ΘΑΛΗΣ+ΦΙΛΟΙ**, μιας ομάδας εθελοντών η οποία συμβάλλει στο γεφύρωμα του χάσματος ανάμεσα στα μαθηματικά και στις άλλες μορφές πολιτισμικής δημιουργίας με ιδιαίτερη έμφαση στην εκπαίδευση. Γνωστός στο ελληνικό αναγνωστικό κοινό από βιβλία, όπως «Τα τρία ανθρωπάκια» και «Μακαβέτας», σημείωσε μεγάλη επιτυχία με το μυθιστόρημά του «Ο Θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλνμπαχ». Το βιβλίο μεταφράστηκε σε περισσότερες από τριάντα γλώσσες και απέσπασε εγκωμιαστικές κριτικές από σημαίνοντα πρόσωπα.



Είναι το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα. Ένας νέος, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, αφηγείται τη ζωή του θείου του, ο οποίος, όντας φημισμένος κάποτε μαθηματικός, αφιέρωσε τη ζωή του στην απόδειξη της εικασίας του Γκόλντμπαχ, η οποία είναι ένα από τα πιο περίπλοκα προβλήματα στην ιστορία των Μαθηματικών.

B. Αφηγηματική τέχνη, ένας διαφορετικός τρόπος για να προσεγγίσουμε τον κόσμο των μαθηματικών.

Το βιβλίο στη Ελλάδα είναι λίγο σαν ποινικό
αδίκημα. Κανένας δεν θέλει να είναι συνεργός
Όλοι σ΄αφήνουν να κάτσεις στο σκαμνί μόνος σου...

Φρέντυ Γερμανός

Κάπως έτσι, μόνος, περίμενα να είμαι κι εγώ στην πρώτη συνάντηση με τους μαθητές της τρίτης τάξης του γυμνασίου, μετά την ανάγνωση του μυθιστορήματος του Απόστολου Δοξιάδη. Πίστευα κι εγώ πως για τους πολλούς το βιβλίο είναι ένα αβάσταχτο βάρος που δεν το θέλει κανείς.

Έκανα όμως λάθος. Τα περισσότερα παιδιά είχαν διαβάσει το βιβλίο και το είχαν πραγματικά χαρεί. Κάποιοι μάλιστα οι οποίοι μέχρι τότε δεν είχαν διαβάσει κι άλλο βιβλίο − για όλα όμως τα πράγματα υπάρχει πάντα μια πρώτη φορά − το καταβρόχθισαν σε μια βραδιά!

Η χαρά μου από την απρόσμενη συμμετοχή και συνεργασία των παιδιών στη συζήτηση που ακολούθησε ήταν μεγάλη. Ταυτόχρονα, η ίδια αυτή αθρόα συμμετοχή και η προθυμία στη συζήτηση αποτελούσε για μένα και ένα μεγάλο ερωτηματικό.

Ο Απόστολος Δοξιάδης, όπως γράφει ο Jane Shilling στην εφημ. ‘THE TIMES’, αξίζει τις θερμές ευχαριστίες όλων των άσχετων με τα μαθηματικά του κόσμου… Κι έχει δίκιο, αφού κατάφερε να αποκαλύψει ακόμα και σ΄αυτούς που χαρακτηρίζονταν αδύνατοι στα μαθηματικά λίγη από την ομορφιά της μαθηματικής σκέψης. Πώς, όμως, το κατόρθωσε αυτό, αφού **τα μαθηματικά**, όπως όλοι γνωρίζουμε, **δεν είναι προσιτά και άμεσα αποδεκτά σε μεγάλο αριθμό ανθρώπων**; Ποιο μαγικό ραβδάκι κρατούσε στα χέρια του, όταν, γνωρίζοντας – αλλά κι αγαπώντας – τον κόσμο των μαθηματικών, ακολούθησε τη γνωστή αλλά και σοφή οδηγία «γράφε ό,τι γνωρίζεις» κι έγραψε για έναν μαθηματικό και την ενασχόλησή του με τη θεωρούμενη ως «ψυχρή και απρόσωπη» επιστήμη των μαθηματικών;*

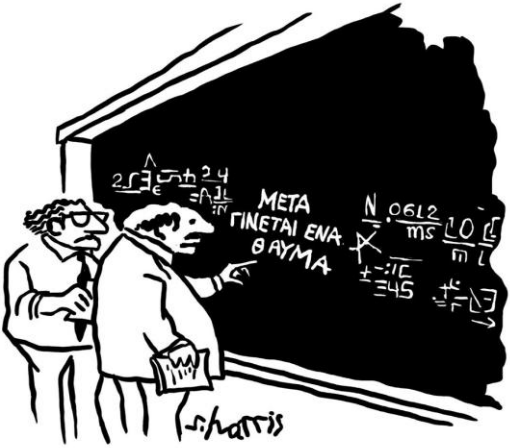
Πιθανώς το μαγικό αυτό ραβδί να συνιστά η ίδια η αφήγηση. Η αφηγηματική παράδοση, ήδη από την εποχή της Ποιητικής του Αριστοτέλη, θέλει την αφήγηση φαινόμενο κυρίως αισθητικό**. Ακριβώς, λοιπόν, επειδή αναφερόμαστε στο αισθητικό πεδίο, στο πεδίο της μορφής της έντεχνης έκφρασης, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως με την αφήγηση τα μηνύματα του αφηγητή διατρέχουν το έργο και μεταφέρονται πειστικότατα, χωρίς να απαιτείται κατανάλωση ιδιαίτερης πνευματικής ενέργειας από μας. **Διότι κατά τη μεταφορά αυτή, όποιες αντιρρήσεις ή δυσπιστίες εγείρονται για την αποδοχή νέων γεγονότων, μηδενίζονται από την ίδια την τέχνη της αφήγησης κι έτσι δε χρειάζονται λογικά επιχειρήματα για την άρση τους.** Κι ακριβώς αυτός είναι ο λόγος που κάνει τη λογοτεχνία να είναι προσιτή και άμεσα αποδεκτή στην πλειοψηφία των ανθρώπων!

Αλλά και σύμφωνα με τον ορισμό που δίνει ο ίδιος ο Απόστολος Δοξιάδης στην αφήγηση και που είναι κάπως διαφορετικός από τον καθημερινά παραδεκτό (που μέσες άκρες είναι ταυτόσημος με αυτό που λέμε «ιστορία») και είναι πιο προσανατολισμένος στη γνωστική λειτουργία της αφήγησης, στην αφήγηση δηλαδή ως ένα θεμελιώδη μηχανισμό, ή καλύτερα τρόπο, του ανθρώπινου νου, μπορούμε να δούμε πως ισχύει κάτι ανάλογο.

Αναφέρει ο Δοξιάδης***: «*Αφήγηση είναι η αναπαράσταση σε συμβολική γλώσσα μιας δράσης, σε σειριακή(γραμμική) μορφή, με αρχή, μέση, και τέλος όπου, επιπλέον, κάποια γεγονότα-**όχι όλα, αναγκαστικά**- συνδέονται με σχέσεις αιτιότητας.*» Και συνεχίζει: «...αυτός ο προσδιορισμός, το «όχι όλα, αναγκαστικά» είναι απαραίτητος σε μια μίνι -αφήγηση [...] Όμως σε μια πιο σύνθετη σειρά δράσεων τι γίνεται;. Αν μεν όλα τα επί μέρους γεγονότα της δε συνδέονται καθόλου αιτιακά με κανένα άλλο, τότε η παράθεσή τους δε συνιστά αφήγηση αλλά πλίνθους και κεράμους, ατάκτως ερριμμένους. Αλλά όσο σημαντικό είναι αυτό είναι και το άλλο: ότι δεν είναι ανάγκη να συνδέονται όλα με όλα αιτιακά».

Έτσι, θα μπορούσε κανείς να πει πως και στην αφήγηση μ' αυτή την έννοια κατά κάποιον τρόπο η πειστικότητα διατρέχει το κείμενο ρέοντας απρόσκοπτα, μιας και δεν απαιτούνται **πολλά** λογικά επιχειρήματα για να αποδεχτούμε τις σχέσεις αιτιότητας, άρα ούτε μεγάλη κατανάλωση πνευματικής ενέργειας. Ο αναγνώστης, λοιπόν, της λογοτεχνίας μπορεί να πειστεί χωρίς τη **συνεχή** συνδρομή λογικών επιχειρημάτων και έτσι αυτή γίνεται προσιτή και άμεσα αποδεκτή από την πλειονότητα των ανθρώπων!

Αυτό (τουλάχιστον στα σχολικά μαθηματικά) ίσως δεν μπορεί να ισχύει κατ' αυτόν τον τρόπο.



— *Νομίζω εδώ, στο δεύτερο βήμα, πρέπει να γίνεις λίγο πιο σαφής.*

Εδώ, κατά τη μεταφορά της αλήθειας από τις υποθέσεις ενός προβλήματος στα συμπεράσματά του, κατά τη διαδικασία, δηλαδή, της **απόδειξης**, εμφανίζονται λογικές αντιρρήσεις (δυσπιστίες) για την αποδοχή των νέων ιδεών, τις οποίες, για να υπερνικήσουμε, απαιτείται να καταναλώσουμε μεγάλη πνευματική ενέργεια! Κι αυτό κάνει τα Μαθηματικά, να μην είναι προσιτά και άμεσα αποδεκτά, σε μεγάλο αριθμό ανθρώπων.

Επομένως, με βάση αυτά που προκύπτουν από τις παραπάνω σκέψεις, η αφηγηματική τέχνη του Δοξιάδη είναι αυτή που μεταμόρφωσε την ανάγνωση αυτού του βιβλίου σε συναρπαστική εμπειρία και − όπως γράφει στην εφημερίδα “THE OBSERVER” ο συγγραφέας και κριτικός λογοτεχνίας George Steiner − επιτρέπει στον κοινό αναγνώστη να εισχωρήσει **με ευκολία** σε κατά παράδοση ερμητικά κλειστούς κόσμους…

Αυτή λοιπόν θα μπορούσε να είναι μια απάντηση στην απορία μου για την προθυμία των παιδιών στη συζήτηση, αλλά και μια καλή αφορμή για μια πρώτη κουβέντα, με σκοπό να τονιστεί η δυνατότητα που μας δίνει η αφηγηματική τέχνη, για να προσεγγίσουμε τον κόσμο των μαθηματικών με εξαιρετικά ήπιο και μη τεχνικό τρόπο.

---

*,**,***: αναφορά στη συνέντευξη του Δοξιάδη στο Cogito

Γ. Τρία από τα παραμαθηματικά θέματα* που προκύπτουν από την ανάγνωση του βιβλίου.

(i). Τι είναι τα Μαθηματικά;

Στη σελίδα 42 του βιβλίου διαβάζουμε:

«Για πες μου, λοιπόν», ήταν η πρώτη ερώτηση,
«εσύ τι νομίζεις ότι είναι τα Μαθηματικά;»

Η ερώτηση αυτή του θείου Πέτρου προς το «προσφιλές του ανιψούδι» είναι μια καλή αφορμή για τη δεύτερη κουβέντα.

Θα μπορούσε κανείς να ξεκινήσει από την απάντηση του ερωτήματος που δίνει ο θείος Πέτρος στη σελίδα 44 του βιβλίου.

«…, τα πραγματικά Μαθηματικά[...]Αποτελούν αφηρημένα διανοητικά κατασκευάσματα που –τουλάχιστον για όσο διάστημα ασχολείται μαζί τους ο μαθηματικός- δεν άπτονται στο παραμικρό του πραγματικού κόσμου.»

Η πρακτική χρησιμότητα των «αφηρημένων» μαθηματικών θεωριών πραγματικά είναι μια συχνά επαναλαμβανόμενη μαθητική απορία. Έτσι μπορεί να προκληθεί συζήτηση μέσα από την οποία να προκύψει - *όσο κι αν αυτό δεν το περιμένει κανείς* - η απροσδόκητη εφαρμογή όλων των μαθηματικών θεωριών στη μελέτη των φυσικών φαινομένων, η οποία πραγματικά αποτελεί μεγάλη έκπληξη και πολλές φορές εκφράζεται ως απορία!

Εδώ μάλιστα μπορούμε να αναφέρουμε τη γνωστή φράση του Γαλιλαίου, «**το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες**» η οποία αφορά στη χρήση των μαθηματικών για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων, και βρίσκεται στο φυλλάδιό του με τίτλο «**Il Sagiatore**» το οποίο εκδόθηκε το 1623. Η φράση αυτή έμεινε κλασική και εκφράζει με τρόπο ποιητικό πως **κάθε είδους φυσική πραγματικότητα είναι ένα υλικό μοντέλο κάποιας μαθηματικής θεωρίας**!

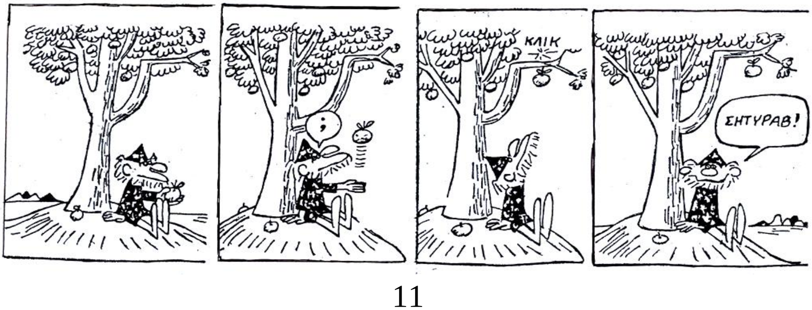
Η άποψη αυτή τουλάχιστον μέχρι σήμερα φαίνεται να δικαιώνεται από τα γεγονότα. Και μάλιστα όσο διεισδυτικοί να είναι οι εξειδικευμένοι ορισμοί που έχουν δοθεί μέχρι σήμερα για τα Μαθηματικά, δεν αναιρούν, αλλά τονίζουν ένα γεγονός το οποίο με την εξέλιξη της επιστήμης γίνεται όλο και ευκρινέστερο.

Κι αυτό είναι πως όχι μόνο η κάθε είδους φυσική πραγματικότητα αναλύεται σε ένα υλικό μοντέλο κάποιας μαθηματικής θεωρίας, αλλά και, αντίστροφα, τα μαθηματικά στο σύνολό τους, με την πρόοδο της επιστήμης προβάλλουν όλο και πιο ξεκάθαρα ως ένα συμβολικό μοντέλο της φυσικής πραγματικότητας.

τα μαθηματικά
στο σύνολο τους, με την πρόοδο
της επιστήμης προβάλλουν όλο
και πιο ξεκάθαρα ως ένα
συμβολικό μοντέλο
της φυσικής πραγματικότητας

Τέτοιες ιδέες όμως θέλουν πολύ χρόνο για να εδραιωθούν**,** και γι' αυτό η κουβέντα με το ίδιο περιεχόμενο μπορεί να συνεχιστεί και στην επόμενη συνάντηση. Εκεί γίνεται προσπάθεια να διαπιστωθεί πως **με βάση αυτόν τον ισχυρισμό μπορεί κανείς, παίρνοντας αφορμές από τα γεγονότα της καθημερινότητας, να κάνει συνειρμικές αναπλάσεις και να βλέπει μεταφορικά μαθηματικές δομές σε κομμάτια της πραγματικότητας**.

Όπως για παράδειγμα η ιστορία του Βολτέρου για τον Νεύτωνα το μήλο και τη βαρύτητα.

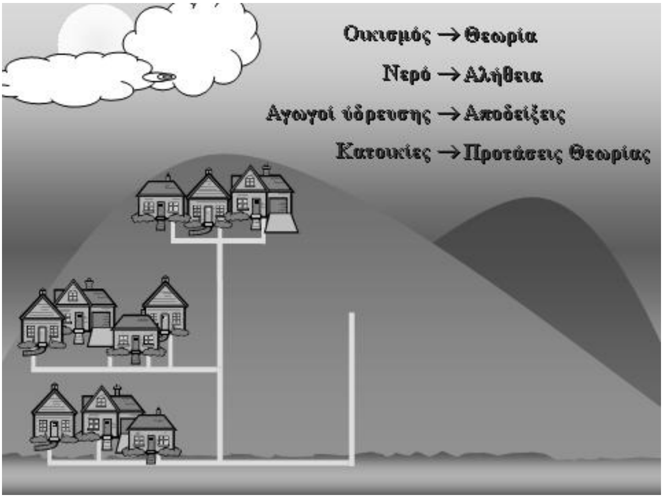


(ii) Οι μαθηματικές αλήθειες δεν βρίσκονται μόνο στους χώρους εξειδίκευσης, αλλά μεταμφιεσμένες κυκλοφορούν ανάμεσα μας στην καθημερινή ζωή.

Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη μεταφορά, η οποία παρουσιάζει (ως περιεχόμενο) το περίφημο θεώρημα της Μη Πληρότητας.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια μαθηματική θεωρία η οποία δεν έχει αξιώματα, είναι σαν να έχουμε έναν ‘οικισμό’ με πλήρες δίκτυο ύδρευσης το οποίο όμως δε μεταφέρει νερό στις κατοικίες, γιατί δεν υπάρχει πηγή να το τροφοδοτήσει...

Σ΄αυτή την εικόνα, ο οικισμός αντιστοιχεί στη θεωρία, το νερό στην αλήθεια, οι αγωγοί ύδρευσης στις αποδείξεις και οι κατοικίες στις προτάσεις.



Οι πηγές οι οποίες αναβλύζουν νερό είναι τα αξιώματα και στην υπόθεσή μας πηγές δεν υπάρχουν. Οι αγωγοί δε μεταφέρουν νερό στις κατοικίες και οι αποδείξεις δε μεταφέρουν αλήθεια στις προτάσεις.

Κάποια μέρα όμως, ανακαλύπτουμε τις υπόγειες πηγές και τις συνδέουμε με το δίκτυο ύδρευσης. Και στα μαθηματικά προσθέσαμε στη θεωρία μας μερικά μόνο αξιώματα κι από ενορατική έγινε αξιωματική.

Αρκούν όμως τα αξιώματα μιας μαθηματικής θεωρίας, ώστε να δώσουν (μέσω των αποδείξεων) αλήθεια σε όλες τις αναγνωρισμένες προτάσεις της θεωρίας;

Και αντίστοιχα, μπορεί η πηγή με μόνη την υδροστατική πίεση να στείλει νερό μέσω των αγωγών σε όλες τις κατοικίες του οικισμού τον οποίο υδρεύει;

Στους μαθηματικούς, το αρχικό ερώτημα, μέχρι και το πρώτο τέταρτο ακόμα του 20ου αιώνα, δεν είχε καν τεθεί και η γενική πίστη ήταν πως, με προσεχτική επιλογή των αξιωμάτων, μια συνεπής και αξιωματικά οργανωμένη θεωρία είναι πλήρης. Δηλαδή έχει τα μέσα να αποδείξει «αληθή» ή «ψευδή» κάθε διαισθητικά αναγνωρισμένη ως πρόταση της θεωρίας.

Στον οικισμό όμως είναι γνωστό πως με μόνες τις δυνατότητες της πηγής η οποία τροφοδοτεί το δίκτυο ύδρευσης, το νερό δεν μπορεί να φτάσει σε κατοικίες οι οποίες βρίσκονται σε μεγαλύτερο υψόμετρο από την πηγή. Κι ακριβώς αυτό το οποίο ήταν πασίγνωστο από την αρχαιότητα, το απέδειξε και στα μαθηματικά το 1931 ο Γκαίντελ.

«Σε μια αξιωματικά οργανωμένη θεωρία, άπειρες προτάσεις της παραμένουν οριστικά αναπόδειχτες με μόνα τα αποδειχτικά μέσα της θεωρίας»

Αυτό γενικά μιλώντας είναι το περιεχόμενο του περίφημου θεωρήματος της Μη Πληρότητας. Πολύ απλό στη διατύπωση του αλλά δυνατή γροθιά στο στομάχι των μαθηματικών του 20ου αιώνα., καθώς του θείου Πέτρου. Ίσως βέβαια είναι παράδοξο αλλά σύμφωνα με την αντιστοιχία που περιγράψαμε, αυτό το περίφημο θεώρημα ως περιεχόμενο ήταν ουσιαστικά γνωστό πολύ πριν από τη διατύπωσή του. Και το 1931 ο Γκαίντελ το ανακάλυψε στο χώρο των μαθηματικών.

Ό,τι κάτι σημαίνει στα μαθηματικά, σημαίνει κάτι και για τον κόσμο της αισθητής πραγματικότητας, λέει ο συγγραφέας του μυθιστορήματος κι έχει δίκιο!

Αξίζει δε να σημειωθεί πως, όταν τον ρώτησαν τον Γκαίντελ προς τα τέλη της ζωής του αν το θεώρημα της Μη Πληρότητας μπορεί να έχει εφαρμογή στην κοινωνία, μεταξύ άλλων είπε:

«... ό,τι ισχύει για τα μαθηματικά το ίδιο ισχύει και για την ζωή. Αν δεν πιστέψει κανείς βαθιά στο δόγμα μιας θρησκείας (αλλά και καμιά φορά, ακόμη και τότε) η ζωή μας δεν είναι πλήρης [...] Η έκπληξη με το θεώρημα της Μη Πληρότητας δεν ήταν ότι ισχύει στη ζωή, αλλά ότι το ίδιο ισχύει και στα μαθηματικά. Μέχρι τότε όλοι πίστευαν πως από κει μπορεί κανείς να φτάσει στην απόλυτη γνώση. Όμως, ακόμη και στα μαθηματικά αυτό είναι αδύνατον. Αυτό ας μας κάνει να είμαστε σεμνοί και ταπεινοί κάτι που όλοι τι χρειαζόμαστε και μόνο καλό μπορεί να μας κάνει.»

Φαίνεται λοιπόν πως οι μαθηματικές αλήθειες δεν βρίσκονται μόνο στους χώρους εξειδίκευσης, αλλά μεταμφιεσμένες κυκλοφορούν ανάμεσα μας στην καθημερινή ζωή. Κι ένας τρόπος να ανακαλύψουμε τις κρυφές γέφυρες που τις συνδέουν μ΄αυτή , φαίνεται να είναι η μαθηματική λογοτεχνία. Ο αναγνώστης αυτού του έργου, για παράδειγμα, βρίσκει εύκολα το δρόμο που τον οδηγεί σ΄αυτό το περίφημο θεώρημα κι έτσι του δίνεται η ευκαιρία να έρθει σε επαφή μ΄αυτό και με την εκλαϊκευμένη παρουσίαση να μάθει για το περιεχόμενό του.

Βέβαια, στην προσπάθειά μας να είμαστε σαφείς σίγουρα δεν μπορεί να είμαστε και απόλυτα ορθοί.. Αλλά όσο λίγο και να πάρει κανείς απ΄ το θεώρημα της Μη Πληρότητας μ΄αυτή ήμε κάποια άλλη εκλαΐκευση, σίγουρα είναι πολυτιμότατο

Τώρα, για το πόσο σημαντική είναι η παρουσίαση με τρόπο εκλαϊκευμένο των μαθηματικών εννοιών, ο Αϊνστάιν προλογίζοντας το βιβλίο του LINCOLN BARNETT, «ΤΟ ΣΥΜΠΑΝ ΚΙ Ο ΔΡ ΑΙΝΣΤΑΙΝ», γράφει:

«Όποιος έχει ποτέ επιχειρήσει να παρουσιάσει με τρόπο εκλαϊκευμένο ένα θέμα μάλλον αφηρημένο, γνωρίζει τις μεγάλες δυσκολίες που εμφανίζει ένα τέτοιο εγχείρημα.

Έν΄απ΄ τα δυο: η κατορθώνει να γίνει αντιληπτός συγκαλύπτοντας τον πυρήνα του προβλήματος και προσφέροντας στον αναγνώστη μονάχα επιφανειακές απόψεις και αόριστους υπαινιγμούς, εξαπατώντας τον έτσι με το να του γεννά την αυταπάτη πως έχει κατανοήσει το ζήτημα – ή δίνει μια ακριβή έκθεση του προβλήματος, αλλά με τέτοιο τρόπο που ο άπειρος αναγνώστης βρίσκεται σε αδυναμία να παρακολουθήσει την ανάπτυξη του θέματος και δεν έχει το θάρρος να συνεχίσει την ανάγνωση.

Αν αυτοί οι δύο τρόποι παραμεριστούν από την μια επιστημονική εκλαΐκευση, δε μένει παρά κάτι το εκπληκτικά περιορισμένο. Όμως αυτό το λίγο που απομένει είναι στην πραγματικότητα πολυτιμότατο. Έχει μεγάλη σημασία να δίνεις στο μεγάλο κοινό μια ευκαιρία να αντιληφθεί – συνειδητά και με κατανόηση – τις προσπάθειες και τ΄αποτελέσματα της επιστημονικής έρευνας. Δεν αρκεί να παίρνουν αυτά τα αποτελέσματα μόνο ειδικευμένοι σ΄αυτό το πεδίο, να τα επεξεργάζονται και να τα εφαρμόζουν. Όταν οι γνώσεις περιορίζονται σ΄ένα μικρό όμιλο, αυτό νεκρώνει το επιστημονικό πνεύμα ενός λαού και οδηγεί στην πνευματική φτώχεια.»

* τα θέματα αυτά στηρίχτηκαν σε ιδέες του Μάριου Γεωργάκη

(iii) «Γιατί να σκοτώσω την κότα που γεννάει τα χρυσά αυγά;»

Μετά από τη συζήτηση για το θεώρημα της Μη Πληρότητας, συχνά τίθεται η απορία αν πρέπει ή όχι να προσπαθούμε για την απόδειξη μιας εικασίας.

Αυτή η ερώτηση του Χιλμπερτ η οποία βρίσκεται στη σελίδα 76 του βιβλίου είναι μια θαυμάσια αφορμή για συζήτηση με σκοπό να τονιστεί πως δεν είναι μόνο θεμιτό αλλά και αναγκαίο να προσπαθούμε για τη απόδειξη μιας εικασίας.

Η Λογική αναπτύχθηκε από την ύπαρξη των προβλημάτων, καθώς και η Ιατρική από την ύπαρξη ασθενειών.

Δ. Άλλα ενδεικτικά θέματα για συζήτηση με αφορμή την ανάγνωση του βιβλίου

(i) Πρώτοι αριθμοί (σελ. 49)

(ii) Η Υπόθεση του Ρίμαν

Εξαιρετικά ενδιαφέρουσες πρότασεις για το πως μπορεί να γίνει μια συζήτηση με ένα από τα παραπάνω θέματα, υπάρχουν στο κείμενο των ΘΑΛΗΣ+ΦΙΛΟΙ για την ταινία Proof.

(iii) Η αποδεικτική μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής, και η απειρία των πρώτων αριθμών. (σελ.50)

Αρχικά μπορεί να συζητηθεί η παρόμοια αποδεικτική διαδικασία της καθημερινή μας ζωή, που είναι το περίφημο «άλλοθι», με το οποίο ο ύποπτος για τη διάπραξη ενός αδικήματος μπορεί να αποδείξει την αθωότητά του. Γιατί ο «ένοχος» πρέπει να βρίσκεται στο συγκεκριμένο τόπο διάπραξης του αδικήματος και ταυτόχρονα να μην βρίσκεται σ΄αυτόν εξαιτίας του «άλλοθι». Κι επειδή αυτό δεν μπορεί να συμβεί σε κανέναν τόπο (άτοπο) το συμπέρασμα είναι προφανές: ο ύποπτος είναι αθώος.

Στη συνέχεια να εξηγηθεί πως ο Ευκλείδης, απέδειξε ότι οι πρώτοι είναι άπειροι.

(iv) Η ουσία μιας μαθηματικής απόδειξης

Κάθε σημαντικό ή ασήμαντο γεγονός χρειάζεται μια πειστική δικαιολογία για να εξηγηθεί.

Στη καθημερινή ζωή η τεχνική, με την οποία από κάποια αρχικά δεδομένα βρίσκουμε πειστικές δικαιολογίες ονομάζεται απόδειξη. Αλλά και στα μαθηματικά με άλλα λόγια λέμε το ίδιο πράγμα, αφού απόδειξη είναι η διαδικασία με την οποία η βεβαιότητα για την αλήθεια των αρχικών υποθέσεων ενός προβλήματος μεταφέρεται αναλλοίωτη στα συμπεράσματα

Αν παροτρύνουμε τους μαθητές να προτείνουν παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων από την καθημερινή τους ζωή, μέσα από συζήτηση θα προκύψει πως οι αποδείξεις αυτές γίνονται μεταξύ συγκεκριμένων ατόμων και οι αποδειγμένοι ισχυρισμοί δεν έχουν γενική ισχύ. Μετά μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να επαληθεύσουν αυτή τη διαπίστωση σε μια ιστορία η οποία είναι μια συμφωνία μεταξύ κάποιων μελών τα οποία έχουν την ιδιότητα του αντιπροσώπου. Μια τέτοια συμφωνία μεταφέρεται αυτόματα και ισχύει σε όλα τα αντιπροσωπευμένα μέλη, κι έχει γενική ισχύ.

Αυτή ακριβώς τη μοναδική ιδιαιτερότητα παρουσιάζουν και οι αποδείξεις στα μαθηματικά. Σ΄ αυτά οι αποδείξεις δεν πραγματοποιούνται με ατομικά στοιχεία, όπως στις εμπειρικές επιστήμες, αλλά με σύμβολα τα οποία αντιπροσωπεύουν άπειρα στο πλήθος ατομικά στοιχεία. Έτσι, πραγματοποιώντας με λίγα λογικά βήματα μια μαθηματική απόδειξη, έχουμε ως αποτέλεσμα μια ιδιότητα-θεώρημα η οποία αυτόματα μεταφέρεται και ισχύει σε άπειρες περιπτώσεις τις οποίες διαφορετικά και μια προς μια θα ήταν αδύνατο να ελέγξουμε.

Άλλα ενδιαφέροντα στοιχεία για την απόδειξη μπορεί κανείς να βρει πάλι στο κείμενο των ΘΑΛΗΣ+ΦΙΛΟΙ για την ταινία Proof, όπου δίνονται ιδέες για θέματα συζήτησης.

(iv) Ιστορικά - Βιογραφικά

Να βρουν σε εγκυκλοπαίδειες ή στο διαδίκτυο για τους την ζωή και το έργο μαθηματικών όπως ο Κωσταντίνος Καραθεοδωρή, ο Χάρντι (Godfrey Harold Hardy), ο Ραμάνατζαν (Ramanujam), ο Λίτλεγουντ (John Edensor Littlewood), ο Χίλμπερτ (David Hilbert), …

Τέλος εκτός απ΄αυτά τα ενδεικτικά θέματα, η ανάγνωση του βιβλίου είναι μια θαυμάσια ευκαιρία να προκληθούν συζητήσεις για πολλές υποθέσεις και εικασίες εκτός απ΄αυτή του Γκόλντμαχ!

Ο θείος Πέτρος τόλμησε. Εσείς;